Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 3

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. Д. ТАРТАКОВСКИЙ

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛОСКИХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ОДНОРОДНЫЕ СЛОИ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 21 I 1950)

1. Вычисление коэффициентов отражения и преломления при прохождении плоских волн через n однородных плоских слоев с произвольно заданными волновыми сопротивлениями и толщинами, ограниченных полубесконечными средами, сводится к решению системы $2(n+1)$ алгебраических уравнений, образуемых при подстановке в граничные условия выражений потенциалов прямой и обратной волны в крайних средах и слоях. Для случая, например, прохождения звуковых волн через жидкие слои, характеризуемые плотностью ρ_i, скоростью распространения звуковых волн c_i и толщиной l_i, такая система может быть представлена в виде:

$$\begin{gathered} k_i [D_i \exp(ik_i x_i) - R_i \exp(-ik_i x_i)] = \\ = k_{i+1} [D_{i+1} \exp(ik_{i+1} x_i) - R_{i+1} \exp(-ik_{i+1} x_i)], \\ \rho_i [D_i \exp(ik_i x_i) + R_i \exp(-ik_i x_i)] = \\ = \rho_{i+1} [D_{i+1} \exp(ik_{i+1} x_i) + R_{i+1} \exp(-ik_{i+1} x_i)], \end{gathered} \tag{1}$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots, n$; $k_i = \omega \cos\theta_i / c_i$; ω — круговая частота плоской волны; θ_i — угол между направлением распространения и осью x-в, перпендикулярной к слоям (направленной против падающей волны); D_i и R_i — амплитудные значения потенциалов прямой и обратной волны; $x_i = -\sum\limits_{j=1}^{i} l_j$. Слои перенумерованы по направлению падающей волны индексами $1, 2, \ldots, n$; входная и выходная среды 0, $n+1$; соответственно, $D_0 = 1$, $R_{n+1} = 0$.

Решение (1) позволяет найти коэффициент отражения $R (= R_0)$ и коэффициент прохождения в среду $n+1$ $D (= D_{n+1})$.

2. Определитель системы (1) может быть представлен в виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} Y_0 & 1 & Y_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & Y_1 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_1} & Y_1 e^{i\varphi_1} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 e^{-i\varphi_1} & -e^{i\varphi_1} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & Y_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & Z_n & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & e^{-i\varphi_n} & Y_n e^{i\varphi_n} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & Z_n e^{-i\varphi_n} & -e^{i\varphi_n} & Z_{n+1} \end{vmatrix} \times \tag{2}$$

$$\times \prod_{i=0}^{n} (\rho_i k_{i+1}) \exp\left(-ik_{n+1} \sum_{i=1}^{n} l_i\right), \text{ где } Z_i = \rho_i c_i / \cos\theta_i, \ Y_i = 1/Z_i, \ \varphi_i = k_i l_i.$$

Разложив (2) по минорам последнего столбца, получаем

$$\Delta = (Z_{n+1}M_n - N_n)\prod_{i=0}^{n}(\rho_i k_{i+1})\exp\left(-ik_{n+1}\sum_{i=1}^{n} l_i\right), \tag{3}$$

где

$$M_n = \begin{vmatrix} Y_0 & 1 & Y_1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & Z_1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_1} & Z_1 e^{i\varphi_1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 e^{-i\varphi_1} & -e^{i\varphi_1} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & Y_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Z_n & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{-i\varphi_n} & Y_n e^{i\varphi_n} \end{vmatrix};$$

$$N_n = \begin{vmatrix} Y_0 & 1 & Y_1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & Z_1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_1} & Y_1 e^{i\varphi_1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & Z e^{-i\varphi_1} & -e^{i\varphi_1} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & Y_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Z_n & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Z_n e^{-i\varphi_n} & e^{i\varphi_n} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Можно показать, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} M_n &= 2(\cos\varphi_n M_{n-1} - iY_n\sin\varphi_n N_{n-1}), \quad M_0 = Y_0, \\ N_n &= 2(\cos\varphi_n N_{n-1} - iZ_n\sin\varphi_n M_{n-1}), \quad N_0 = 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Аналогичным путем вычисляется определитель числителя R $\Delta^{(R)}$, получаемый из (2) заменой в первом столбце знака — перед единицей на $+$.

Определитель числителя D $\Delta^{(D)}$ может быть получен в виде

$$\Delta_n^{(D)} = \Delta_{n-1}^{(D)}\, 2k_n\rho_n, \quad \Delta_0^{(D)} = 2k_0\rho_0. \tag{6}$$

Выражения (5), (6) имеют рекуррентный характер и позволяют, последовательно увеличивая число слоев, вычислить $R = \Delta^{(R)}/\Delta$ и $D = \Delta^{(D)}/\Delta$ при любом n. В этом отношении они похожи на выражения, полученные А. Г. Власовым для оптических пластин [1]. Однако общий недостаток тех и других формул — это невозможность оценить влияние параметров всех слоев в совокупности, а не только одного последнего, на величину R и D.

3. Последовательно вычисляя по (5) $M_1, M_2, \dots, N_1, N_2, \dots$, можно притти к выражениям

$$\begin{aligned} M_n &= \left[Y_0 \overset{n}{\mathbf{S}}_1(\beta,\alpha) \pm i \overset{n}{\mathbf{S}}_2(\beta,\alpha)\right], \quad N_n = \left[\overset{n}{\mathbf{S}}_1(\alpha,\beta) \pm iY_0 \overset{n}{\mathbf{S}}_2(\alpha,\beta)\right], \\ \overset{n}{\mathbf{S}}_1(\alpha,\beta) &= \prod_{i=1}^{n} 2\cos\varphi_i \left[1 - \sum_{q=2}^{n}\alpha_q \sum_{p=1}^{q-1}\beta_p + \sum_{s=4}^{n}\alpha_s \sum_{r=3}^{s-1}\beta_r \sum_{q=2}^{r-1}\alpha_q \sum_{p=1}^{q-1}\beta_p - \dots\right], \end{aligned} \tag{7}$$

$$\overset{n}{\mathbf{S}}_2(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^{p} 2\cos\varphi_i \left[\sum_{p=1}^{n} \alpha_p - \sum_{r=3}^{n} \alpha_r \sum_{q=2}^{r-1} \beta_q \sum_{p=1}^{q-1} \alpha_p + \ldots\right], \tag{8}$$

в которых $p, q, r, s, \ldots$ обозначают индексы, по которым производится суммирование, например $\sum_{q=2}^{3} \alpha_q \sum_{p=1}^{q-1} \beta_p = \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_3\beta_2$, и приняты сокращения $\alpha_i = Z_i \operatorname{tg}\varphi_i$; $\beta_i = Y_i \operatorname{tg}\varphi_i$. Знак перед мнимой единицей i берется обратным знаку единицы в первом столбце определителя Δ, $\Delta^{(R)}$ (2).

Убедиться в справедливости (7) можно, увеличивая число слоев до $n+1$. Тогда, применяя подстановку (5), получим

$$M_{n+1} = 2\cos\varphi_{n+1}\left[\left\{Y_0 \overset{n}{\mathbf{S}}_1(\beta, \alpha) - \beta_{n+1} \overset{n}{\mathbf{S}}_2(\alpha, \beta)\right] + \right.$$

$$\left. + i\left[\overset{n}{\mathbf{S}}_2(\beta, \alpha) + \beta_{n+1} \overset{n}{\mathbf{S}}_1(\alpha, \beta)\right]\right\},$$

$$N_{n+1} = 2\cos\varphi_{n+1}\left[\left\{\overset{n}{\mathbf{S}}_1(\alpha, \beta) - \alpha_{n+1} \overset{n}{\mathbf{S}}_2(\beta, \alpha)\right] + \right.$$

$$\left. + iY_0\left[\overset{n}{\mathbf{S}}_2(\alpha, \beta) + \alpha_{n+1} \overset{n}{\mathbf{S}}_1(\beta, \alpha)\right]\right\},$$

которые приводятся к виду (7) с заменой предела n на $n+1$ при использовании соотношений

$$\begin{aligned} \overset{n+1}{\mathbf{S}}_1(\alpha, \beta) &= \left[\overset{n}{\mathbf{S}}_1(\alpha, \beta) - \alpha \overset{n}{\mathbf{S}}_2(\beta, \alpha)\right] \cos\varphi_{n+1}, \\ \overset{n+1}{\mathbf{S}}_2(\alpha, \beta) &= \left[\overset{n}{\mathbf{S}}_2(\alpha, \beta) + \alpha \overset{n}{\mathbf{S}}_1(\beta, \alpha)\right] \cos\varphi_{n+1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Учитывая (5), (6), (7), находим

$$R = \frac{\left[\frac{Z_{n+1}}{Z_0} \overset{n}{\mathbf{S}}_1(\beta, \alpha) - \overset{n}{\mathbf{S}}_1(\alpha, \beta)\right] + i\left[\frac{1}{Z_0} \overset{n}{\mathbf{S}}_2(\alpha, \beta) - Z_{n+1} \overset{n}{\mathbf{S}}_2(\beta, \alpha)\right]}{\left[\frac{Z_{n+1}}{Z_0} \overset{n}{\mathbf{S}}_1(\beta, \alpha) + \overset{n}{\mathbf{S}}_1(\alpha, \beta)\right] + i\left[\frac{1}{Z_0} \overset{n}{\mathbf{S}}_2(\alpha, \beta) + Z_{n+1} \overset{n}{\mathbf{S}}_2(\beta, \alpha)\right]}, \tag{10}$$

$$D = \frac{2\frac{c_{n+1}\cos\theta_0}{c_0\cos\theta_{n+1}} \exp\left(ik_{n+1}\sum_{i=1}^{n} l_i\right)}{\left[\frac{Z_{n+1}}{Z_0} \overset{n}{\mathbf{S}}_1(\beta, \alpha) + \mathbf{S}_1(\alpha, \beta)\right] + i\left[\frac{1}{Z_0} \overset{n}{\mathbf{S}}_2(\alpha, \beta) + Z_{n+1} \mathbf{S}_2(\beta, \alpha)\right]}. \tag{11}$$

4. Рассмотрим частный случай. Принимая $Z_l = Z_1$ (но $c_l/\cos\theta_l$, $\varphi_i \neq \mathrm{const}$), получаем

$$\overset{n}{\mathbf{S}}_1(\alpha, \beta) = \overset{n}{\mathbf{S}}_1(\beta, \alpha) = \cos\sum_{i=1}^{n} \varphi_i,$$

$$Y_1 \overset{n}{\mathbf{S}}_2(\alpha, \beta) = Z_1 \overset{n}{\mathbf{S}}_2(\beta, \alpha) = \sin\sum_{i=1}^{n} \varphi_i,$$

$$R=\frac{\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_0}-1\right)\cos\sum_{i=1}^{n}\varphi_i+i\left(\frac{Z_1}{Z_0}-\frac{Z_{n+1}}{Z_1}\right)\sin\sum_{i=1}^{n}\varphi_i}{\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_0}+1\right)\cos\sum_{i=1}^{n}\varphi_i+i\left(\frac{Z_1}{Z_0}+\frac{Z_{n+1}}{Z_1}\right)\sin\sum_{i=1}^{n}\varphi_i}, \tag{12}$$

$$D=\frac{2\frac{c_{n+1}\cos\theta_0}{c_0\cos\theta_{n+1}}\exp\left(ik_{n+1}\sum_{i=1}^{n}l_i\right)}{\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_0}+1\right)\cos\sum_{i=1}^{n}\varphi_i+i\left(\frac{Z_1}{Z_0}+\frac{Z_{n+1}}{Z_1}\right)\sin\sum_{i=1}^{n}\varphi_i}. \tag{13}$$

Последние идентичны с выражениями R и D при переходе плоских волн через один слой, волновая длина которого $\varphi=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i$.

5. Положив $\rho_i=1$, $\cos\theta_i=1$ и проведя подстановку $c_в/c_i=n_i$, где $c_в$ — скорость распространения плоских световых волн в вакууме, получаем для перпендикулярного падения световых волн *

$$R=\frac{\left[\frac{n_0}{n_{k+1}}\overset{k}{\mathbf{S}}_1(\rho,\mu)-\overset{k}{\mathbf{S}}_1(\mu,\rho)\right]+i\left[n_0\overset{k}{\mathbf{S}}_2(\mu,\rho)-\frac{1}{n_{k+1}}\overset{k}{\mathbf{S}}_2(\rho,\mu)\right]}{\left[\frac{n_0}{n_{k+1}}\overset{k}{\mathbf{S}}_1(\rho,\mu)+\overset{k}{\mathbf{S}}_1(\mu,\rho)\right]+i\left[n_0\overset{k}{\mathbf{S}}_2(\mu,\rho)+\frac{1}{n_{k+1}}\overset{k}{\mathbf{S}}_2(\rho,\mu)\right]}, \tag{10a}$$

$$D=\frac{2\frac{n}{n_{k+1}}\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda_в}n_{k+1}\sum_{i=1}^{n}l_i\right)}{\left[\frac{n_0}{n_{k+1}}\overset{k}{\mathbf{S}}_1(\rho,\mu)+\overset{k}{\mathbf{S}}_1(\mu,\rho)\right]+i\left[n_0\overset{k}{\mathbf{S}}_2(\mu,\rho)+\frac{1}{n_{k+1}}\overset{k}{\mathbf{S}}_2(\rho,\mu)\right]}, \tag{11a}$$

где

$$\overset{k}{\mathbf{S}}_1(\rho,\mu)=\prod_{i=1}^{n}2\cos\varphi_i\left[1-\sum_{q=2}^{n}\rho_q\sum_{p=1}^{q-1}\mu_p+\sum_{s=4}^{n}\rho_s\sum_{r=3}^{s-1}\mu_r\sum_{q=2}^{r-1}\rho_q\sum_{p=1}^{q-1}\mu_p-\ldots\right],$$

$$\overset{k}{\mathbf{S}}_2(\rho,\mu)=\prod_{i=1}^{n}2\cos\varphi_i\left[\sum_{p=1}^{n}\rho_p-\sum_{r=3}^{n}\rho_r\sum_{q=2}^{r-1}\mu_q\sum_{p=1}^{q-1}\rho_p+\ldots\right],$$

$$\rho_i=n_i\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{c_в}n_il_i\right),\quad \mu_i=\frac{1}{n_i}\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{c_в}n_il_i\right).$$

Выражения типа (10), (11), содержащие суммы формы S_1, S_2, могут быть также получены с помощью матричной алгебры. Таким образом, например, найдена формула для интенсивности света, поляризованного n плоско-параллельными пластинами ([3]).

Физический институт
им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило
7 I 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Власов, Математическая теория просветляющего действия тонких пленок, в книге И. В. Гребенщиков и др., Просветление оптики, М., 1946. [2] Л. М. Бреховских, ЖТФ, 19, № 10, 1126 (1949). [3] Hsien Yü, M. Richartz and Yüng-kang Liang, JOSA, 37, 99 (1947).

* Число слоев в данном случае обозначено через k.