**Доклады Академии Наук СССР**
**1950. Том LXXI, № 3**

МАТЕМАТИКА

Э. С. ЦИТЛАНАДЗЕ

# К ВАРИАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p$ $(p>1)$

*(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 I 1950)*

§ 1. В настоящей работе мы исследуем один класс нелинейных ограниченных операторов вариационного типа в пространстве $L_p$. Тем самым мы переносим результаты работ ([1-5]) из гильбертова пространства на функциональное пространство $L_p$.

Как известно, пространство $L_p$ есть совокупность всех действительных измеримых функций $x(s)$ на сегменте $0 \leqslant s \leqslant 1$, для которых существует интеграл $\int\limits_0^1 |x(s)|^p\, ds$ в смысле Лебега.

Рассмотрим слабо непрерывный функционал $f(x)$, $x(s) \in L_p$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, определенный в $L_p$ и удовлетворяющий условиям: 1) $f(x)>0$ для всех $x(s) \in L_p$, $x \neq \theta_p$, где $\theta_p$ — нулевой элемент пространства $L_p$; 2) $f(x)=0$ только тогда, когда $x=\theta_p$; 3) функционал $f(x)$ дифференцируем в каждой точке $x \in L_p$ в смысле Фреше ([1]).

Из условия дифференцируемости функционала $f(x)$ для любых точек $x(s)$, $h(s) \in L_p$, определяется линейный относительно $h(s)$ функционал $df(x;h)$. Последний, в силу известной теоремы Рица ([6]), в $L_p$ допускает единственное представление вида $df(x;h)=(Lx,h)$, где $(Lx,h)$ обозначает внутреннее произведение элементов $Lx \in L_q$ и $h \in L_p\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, таким образом, дифференциал Фреше функционала $f(x)$ порождает некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор $Lx$, принадлежащий пространству $L_q$.

Обозначим через $S_1$ единичную сферу из $L_p$, а через $\overline{S}_1$ — поверхность сферы $S_1$.

Легко проверить, что когда функционал $f(x)$ удовлетворяет условиям 1), 2) и 3), тогда оператор $Lx$ удовлетворяет условию: 1′) $Lx=\theta_q$ только тогда, когда $x=\theta_p$. Кроме того, предполагаем: 2′) $Lx$ сам дифференцируем в смысле Фреше; 3′) $Lx$ удовлетворяет условию Липшица в $S_1$:

$$\| Lx' - Lx'' \| \leqslant M \| x' - x'' \|, \tag{1}$$

где постоянная $M$ не зависит от выбора элементов $x'$, $x''$ из $S_1$.

Из условия 3′) вытекает, что $(dL(x;h), h_1) = (dL(x;h_1), h)$, где $x$, $h$, $h_1 \in L_p$, в силу которого $Lx$ будем называть симметрическим оператором. Назовем множество $E \in L_p$ ограниченным, если нормы всех элементов, принадлежащих $E$, не превышают определенного положительного числа $k$. В силу условий 1′) и 3′) оператор $Lx$ ограничен на $E$.

Пусть $\{\varphi_i\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ — ортогональная система Хара ([7]); тогда каждому $x(s) \in L_p$ соответствует ряд $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i$ такой, что $\left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \right\| \to 0$ при $n \to \infty$, где $c_i = (x, \varphi_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Обозначим $A_n x = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$, $R_n x = \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i \varphi_i$.

Лемма 1. *Если $f(x)$ слабо непрерывный функционал в $S_1$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существует целое число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n \geqslant N$ и для любого $x \in S_1$ имеем неравенство: $| f(A_n x) - f(x) | < \varepsilon$.*

Определение 1. Оператор $Lx$, порожденный дифференциалом Фреше функционала $f(x)$, будем называть вполне непрерывным, если он отображает множество элементов $S \in L_p$ в компактное множество.

Пусть элементу $Lx \in L_q$, $x \in S_1$, соответствует разложение по ортогональной системе $\{\varphi_i\}$ вида $Lx \approx A_n Lx + R_n Lx$. Кроме того, пусть $| \omega_f(x; h) | \leqslant c \| h \|^2$, где $\omega_f(x; h) = f(x+h) - f(x) - (Lx, h)$ и $c$ — некоторая постоянная. Тогда имеет место

Лемма 2. *Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $x \in S_1$ и для всех $n \geqslant N$ имеем неравенство $\| R_n Lx \| < \varepsilon$.*

С помощью лемм 1 и 2 доказывается

Теорема 1. *Оператор $Lx$, порожденный дифференциалом Фреше слабо непрерывного функционала $f(x)$, удовлетворяющего условию $| \omega_f(x; h) | \leqslant c \| h \|^2$, есть вполне непрерывный.*

Определение 2. Элемент $x \in \overline{S}_1 \in L_p$ будем называть нормированным собственным элементом оператора $Lx$, если

$$Lx(s) = \lambda N x(s) \tag{2}$$

почти всюду на сегменте $0 \leqslant s \leqslant 1$, где

$$Nx(s) = | x(s) |^{p/q} \operatorname{sign} x(s),$$

$\lambda$ — собственное число, отвечающее собственному элементу $x$.

Легко показать, что если $x$ — нормированный собственный элемент оператора $Lx$, то

$$\lambda = \| Lx \| = (Lx, x) = (N^{-1} Lx, Nx)^{p/q} \neq 0,$$

где $N^{-1}$ — оператор, обратный к $N$.

Рассмотрим произвольную пару действительных чисел $\xi$ и $\eta$. Если $q > p$, можно доказать, что

$$\left| |\xi|^{q/p} \operatorname{sign} \xi - |\eta|^{q/p} \operatorname{sign} \eta \right|^p \leqslant$$

$$\leqslant \max \left[ 2^p, \left( \frac{q}{p} \right)^p \right] | \xi - \eta |^p ( | \xi |^{q-p} + | \eta |^{q-p}), \tag{3}$$

$$\left| | \xi |^{p/q} \operatorname{sign} \xi - | \eta |^{p/q} \operatorname{sign} \eta \right|^q \leqslant 2^q | \xi - \eta | ( |\xi|^{p-q} + |\eta|^{p-q}). \tag{4}$$

Если $q < p$, то получаем аналогичные неравенства. Основываясь на (3) и (4) и аналогичных им неравенствах, доказывается

Теорема 2. *Операторы $N$ и $N^{-1}$ в сфере $S_2 \in L_p$ с радиусом, равным 2, удовлетворяют условию Липшица:*

$$\| Nx' - Nx'' \| \leqslant K \| x' - x'' \|, \quad \| N^{-1} Lx' - N^{-1} Lx'' \| \leqslant \overline{K} \| x' - x'' \|, \tag{5}$$

*где $x'$ и $x''$ — произвольная пара элементов из $S_2$, а $K$ и $\overline{K}$ — постоянные, зависящие только от $p$ и $q$.*

§ 2. В дальнейшем обозначим через $\Omega x$ оператор вида $\Omega x = N^{-1}Lx - (N^{-1}Lx, Nx)\,x$. Оператор $\Omega x$ в $S_2$ удовлетворяет условию Липшица. Доказательство этого предложения вытекает из (5) и из очевидного равенства

$$\Omega x' - \Omega x'' = N^{-1}Lx' - N^{-1}Lx'' + (N^{-1}Lx'' - N^{-1}Lx', Nx)x' + \\ + (N^{-1}Lx'', Nx'' - Nx')\,x' + (N^{-1}Lx'', Nx'')(x' - x''),$$

где $x'$, $x''$ — произвольная пара элементов из $S_2$. Кроме того, вычисления убеждают нас, что $\Omega x = \theta_p$ лишь тогда, когда $x$ есть нормированный собственный элемент оператора $Lx$, $(Lx, \Omega x) > 0$, $(\Omega x, Nx) = 0$ для всех $x \in \bar{S}_1$ и $\Omega x$ ограничен в сфере $S_2$: $\|\Omega x\| \leqslant 2^{p+q}M^{q/p} = M_1$, где $M$ — постоянная из (1).

Пусть $\tau$ — непрерывный параметр, изменяющийся на сегменте $(0, 1/M_1)$ и пусть $x_\tau$ — непрерывный образ этого параметра. Рассмотрим функциональное уравнение вида

$$dx_\tau = \Omega x_\tau d\tau. \qquad (6)$$

Непосредственным обобщением метода последовательных приближений на функциональное пространство $L_p$ доказывается, что уравнение (6) на сегменте $0 \leqslant \tau \leqslant 1/M_1$ имеет единственное решение $x_\tau$, которое при $\tau = 0$ обращается в заданный элемент $x_0$, норма которого равна 1. Решение $x_\tau$ непрерывно зависит от $x_0$.

В силу того, что $(Nx_\tau, dx_\tau) = 0$ для всех $x_\tau \in \bar{S}_1$, решение уравнения (6) мы будем называть ортогональной траекторией, выходящей из точки $x_0 \in \bar{S}_1$. Относительно ортогональных траекторий можно доказать следующие предложения.

Лемма 3. *Ортогональная траектория $x_\tau$, выходящая из точки $x_0$, $\|x\| = 1$, где $x_0$ не является собственным элементом оператора $Lx$, целиком лежит на поверхности $\bar{S}_1$ единичной сферы $S_1$.*

Лемма 4. *Вдоль ортогональной траектории $x_\tau$ для произвольного $\tau$ из сегмента $(0, 1/M_1)$ дифференциал Фреше $df(x_\tau; dx_\tau) > 0$.*

Положительность дифференциала Фреше определяет направление ортогональной траектории в сторону возрастания функционала $f(x_\tau)$ в данной точке.

§ 3. Пусть $x \in S_1$. Назовем $x$ и $-x$ диаметрально противоположные элементы сферы $S_1$. Идентифицируя диаметрально противоположные точки сферы $S_1$, получим проективное пространство $S_1^*$. Проективное пространство $S_1^*$ содержит множества любой категории. Категорию множества мы понимаем в смысле Люстерника — Шнирельмана ([8]). Функционал $f(x)$ на $S_1^*$ будет четный, а $Lx$ — нечетный.

Обозначим через $[P^*]_k \in S_1^*$ замкнутый и компактный класс всех множеств категории $\geqslant k$. Кроме того, пусть $[c - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant c + \varepsilon]$ — множество точек $S_1^*$, в которых $c - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant c + \varepsilon$, где $c = \sup\limits_{[P^*]_k} \min\limits_{P^*} f(x)\, P^*$ — произвольное множество класса $[P^*]_k$, $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Для произвольного $\varepsilon > 0$ в классе $[P^*]_k$ существует непустое множество $P_\varepsilon^*$ такое, что $\min\limits_{P_\varepsilon^*} f(x) > c - \varepsilon$. $P_\varepsilon^*$ назовем $\varepsilon$-максимальным множеством. Пусть $\{x_\varepsilon\} \in P_\varepsilon^*$ есть множество точек, на котором достигается минимум функционала $f(x)$. Очевидно, что

$$\{x_\varepsilon\} \in [c - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant c + \varepsilon].$$

Пусть $x^\varepsilon$ — произвольная точка пересечения $M_\varepsilon = P_\varepsilon^* \times [c - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant c + \varepsilon]$, не являющаяся собственным элементом оператора $Lx$.

В точке $x^\varepsilon$ имеем неравенство $\| \Omega x^\varepsilon \| \geqslant \alpha > 0$, где $\alpha$ — некоторое число. Около точки $x^\varepsilon$ на $\overline{S}_1$ построим замкнутую сферу $\overline{S(x^\varepsilon; r)}$, где $r = 2\varepsilon$. Можно доказать, что для всех $x \in \overline{S(x^\varepsilon; r)}$ имеет место оценка $\| \Omega x \| \geqslant \alpha / 2 > 0$.

Это значит, что $\overline{S(x^\varepsilon; r)}$ не содержит собственного элемента оператора $Lx$. Кроме того, существует постоянная $B > 0$ такая, что для всех $x \in \overline{S(x^\varepsilon; r)}$ имеем неравенство $\| x \| \|Lx\| - (x, Lx) \geqslant B$.

Применяя последнее неравенство, можно показать, что в сфере $\overline{S(x^\varepsilon; r)}$ имеет место неравенство $df(x_\tau; dx_\tau) \geqslant R\, d\tau > 0$, где $R = B \cdot m$ и $m = \inf \| Lx \|$ для всех $x \in \overline{S(x^\varepsilon; r)}$. Двигаясь по ортогональной траектории, исходящей из точки $x^\varepsilon$, непременно пересечем поверхность уровня $(f = c + \varepsilon)$.

Определение 3. Назовем $x_\varepsilon \in M_\varepsilon$ $\varepsilon$-собственным элементом оператора $Lx$, если $\| \Omega x_\varepsilon \| < \varepsilon / 2\overline{c}$, где $\overline{c}$ — постоянная Липшица для оператора $\Omega x$.

Теорема 3. *Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in M_\varepsilon$ такой, что $x_\varepsilon$ будет $\varepsilon$-собственным элементом оператора $Lx$.*

Доказательство получается с помощью рассуждения от противного, если деформировать множество $M_\varepsilon$ до поверхности уровня $(f = c + \varepsilon)$ вдоль ортогональных траекторий, исходящих из точек множества $M_\varepsilon$.

Пусть $\varepsilon$ пробегает последовательность $\{\varepsilon_n\} \to 0$. Основываясь на теореме 3, легко доказать следующую основную теорему.

Теорема 4. *Оператор $Lx$ на поверхности уровня $(f = c)$ имеет, по крайней мере, один собственный элемент.*

Если взять классы множеств $[P_1]^*$, $[P_2]^*, \ldots$, то на каждой поверхности уровня $(f = c_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ существует собственный элемент оператора $Lx$. Как и в случае гильбертова пространства (см. ([1])), можно установить, что среди собственных элементов $\{x_k\}$ существует счетное множество линейно независимых, слабый предел которых равен $\theta_p$.

Теорема 4 переносится на линейные пространства типа Банаха, в которых существуют биортогональные базисы.

Тбилисский институт
инженеров железнодорожного транспорта
им. В. И. Ленина

Поступило
24 IX 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Люстерник, Изв. АН СССР, сер. матем., 3, 257 (1939). [2] В. И. Соболев, ДАН, 31, № 8 (1941). [3] E. H. Rothe, Ann. of Math., 49, No. 2, 265 (1948). [4] Э. С. Цитланадзе, ДАН, 56, № 1 (1947). [5] Э. С. Цитланадзе, ДАН, 57, № 9 (1947). [6] F. Riesz, Math. Ann., 69, 449 (1910). [7] A. Haar, Math. Ann., 69, 331 (1910). [8] Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман, Топологические методы в вариационных задачах, М., 1930.