Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 4

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

В. И. МИХЕЕВ

ЧИСЛО ВИДОВ ГОМОЛОГИЧНОСТИ КРИСТАЛЛОВ

(Представлено академиком Д. С. Белянкиным 2 II 1950)

Е. С. Федоров (1) дал стройную схему проективных соответствий, имеющих применение в кристаллографии. Самый общий вид однозначной или многозначной связи между двумя системами геометрических элементов, независимо от того, являются ли соответственные элементы систем однородными или неоднородными, называется проективным соответствием. Если соответствие однозначно, а соответственные элементы систем разнородны, то такое проективное соответствие называется корреляцией. Если же при однозначном соответствии двух систем соответственные элементы однородны, то соответствие называется гомологией, системы гомологичными, а преобразование, переводящее одну систему в другую, называется гомологическим. В частном случае, когда при однозначном соответствии соответственные элементы системы не только однородны, но и равны, имеет место симметрия, системы называются симметричными, а преобразование одной из систем в другую является симметрическим преобразованием. Из этой схемы ясно, что симметрия является частным случаем гомологии.

Если симметрия нашла широкое применение в кристаллографии и теория симметрии успешно развивалась трудами многих ученых, получив свое блестящее завершение в работах Е. С. Федорова, то в отношении изучения гомологии было сделано крайне мало. Собственно говоря, применение гомологических свойств фигур в кристаллографии до сих пор ограничивается лишь понятием об однородных деформациях кристаллического пространства (сдвиги и растяжения). Понятие об однородных деформациях было введено в кристаллографию также Е. С. Федоровым (2) и позволило ему не только обосновать закон кристаллографических пределов, но и создать новый метод определения вещества по углам его кристаллов — так называемый кристаллохимический анализ.

Причины, обусловившие недостаточное внимание, которое уделялось изучению гомологичных свойств фигур, повидимому, лежат в исключительно большом успехе, который имело применение симметрии в кристаллографии. Вместе с тем нельзя не подчеркнуть, что гомология есть более общее свойство фигур по сравнению с симметрией и детальное изучение ее сулит более важные обобщения и закономерности по сравнению с теми, которые могут быть найдены на основе изучения симметрии.

Изучение проблемы гомологии совершенно неотложно, если учесть, что теория симметрии в общем может считаться завершенной. Больше того, можно ожидать, что основные положения теории симметрии (например, закон кристаллографической симметрии, число видов симметрии, число пространственных групп симметрии и др.) могут быть выведены из теории гомологии как частные случаи ее закономерностей.

При разработке теории симметрии весьма важную роль сыграло понятие об элементах симметрии, которое открывало чисто геометрический метод изучения симметричных свойств фигур — метод, который оказался наиболее плодотворным в руках кристаллографов. Такой же метод был применен нами и к изучению гомологии ([3]). Укажем здесь основные определения из учения о гомологии.

Определение 1. Две системы геометрических элементов называются взаимногомологичными, если любой совокупности элементов одной системы однозначно соответственна такая же совокупность элементов той же ступени другой системы.

Определение 2. Гомологическим преобразованием называется такое действие, посредством которого из одной системы получается другая, ей гомологичная.

Определение 3. Самогомологичной системой называется такая, для которой можно так произвести одно или несколько гомологических преобразований, что вся система всеми своими элементами совместится сама с собой и будет занимать то же место в пространстве, лишь одни ее элементы, примы, секунды или терции перейдут на место других.

Определение 4. Элементом гомологичности данной самогомологичной системы называется воображаемый геометрический образ, посредством которого производится гомологическое преобразование.

Опираясь на эти определения, нами был доказан ряд важных теорем и сформулированы вытекающие из них следствия.

Теорема 1. *Отражение в плоскости гомологичности есть гомологическое преобразование.*

Плоскость гомологичности представляет собой плоскость косого отражения. Если при отражении в плоскости симметрии проектирующие лучи идут перпендикулярно к плоскости, то проектирующие лучи плоскости гомологичности идут под некоторым углом к ней. Для задания плоскости гомологичности необходимо указать направление ее нормали и направление проектирующих лучей. Угол μ между нормалью к плоскости гомологичности и направлением проектирующих лучей называется углом гомологичности. Нетрудно видеть, что отражение в плоскости гомологичности есть отражение в линейной приме параллельных линий симметрии, а угол μ есть угол примы.

Теорема 2. *Поворот вокруг оси гомологичности есть гомологическое преобразование.*

Под поворотом вокруг оси гомологичности понимается косое круговое вращение системы вокруг некоторой прямой. Любая точка системы при косом вращении движется по окружности, лежащей в плоскости, проведенной через нее и составляющей некоторый угол с прямой. Центром окружности при этом является точка пересечения прямой с плоскостью, в которой производится вращение. Ось гомологичности представляет собой линейную приму точек симметрии с параллельными плоскостями вращения. Для задания оси гомологичности необходимо указать направление оси и положение нормали плоскости вращения. Угол μ между этими направлениями будет углом оси гомологичности.

Теорема 3. *Поворот вокруг инверсионной оси гомологичности есть гомологическое преобразование.*

Инверсионная ось гомологичности есть прямая, посредством которой производится косой круговой поворот и последующая инверсия в точке, лежащей на прямой, приводящие к самосовмещению системы.

Теорема 4. *В пространственных решетках, а следовательно, и в кристаллах, невозможны пятерные оси гомологичности, а также оси гомологичности с наименованием больше шести.*

Теорема 5. *Отражение в точке (инверсия) есть гомологическое преобразование.*

Определение 5. Две пересекающиеся плоскости гомологичности π_1 и π_2 называются параллельно-сопряженными, если проектирующие лучи одной из них параллельны другой.

Теорема 6. *Равнодействующей двух пересекающихся параллельно-сопряженных плоскостей гомологичности является двойная ось гомологичности, совпадающая с их линией пересечения. При этом плоскость вращения равнодействующей оси гомологичности совпадает с плоскостью проектирующих лучей заданных плоскостей гомологичности.*

Определение 6. Две пересекающиеся плоскости гомологичности называются нормально-сопряженными, если проектирующие лучи каждой из них перпендикулярны к линии пересечения соответствующей плоскости гомологичности с плоскостью, проведенной через направление проектирующих лучей.

Теорема 7. *Равнодействующей двух пересекающихся нормально-сопряженных плоскостей гомологичности является ось гомологичности, совпадающая с их линией пересечения. Плоскость вращения равнодействующей оси гомологичности совпадает с плоскостью проектирующих лучей, а наименование ее* $n = 360°/2\alpha$, где α — *угол между направлениями проектирующих лучей.*

Теорема 8. *Поворот вокруг двойной оси гомологичности можно заменить последовательным отражением в двух проходящих через эту ось параллельно-сопряженных плоскостях гомологичности.*

Теорема 9. *Поворот вокруг оси гомологичности на угол* α *можно заменить последовательным отражением в двух нормально-сопряженных плоскостях гомологичности, проходящих через заданную ось и образующих между проектирующими лучами угол* $\alpha/2$.

Опираясь на теоремы 6—9, можно доказать теорему о равнодействующей двух пересекающихся сопряженных осей гомологичности, которая аналогична теореме Эйлера в учении о симметрии.

Возможность сложения элементов гомологичности и умение находить равнодействующие для каждой их пары позволяет дать определение вида гомологичности данной конечной системы.

Определение 7. Видом гомологичности данной конечной системы геометрических элементов называется полная пространственная совокупность ее элементов гомологичности.

Все возможные элементы гомологичности конечных систем, определяющиеся теоремами 1—5, перечислены в табл. 1.

Вывод всех видов (групп) гомологичности можно осуществить путем систематического сочетания известных уже элементов гомологичности друг с другом. При этом, конечно, каждый раз нужно находить равнодействующие элементы гомологичности, которые тоже должны входить в группу.

Элементы гомологичности находятся в тесной связи с однородными деформациями — сдвигами и растяжениями.

Систематическое рассмотрение воздействия однородных деформаций на элементы симметрии конечных фигур приводит к нескольким простым правилам, применение которых открывает другой путь для вывода всех видов гомологичности кристаллических систем.

Если каждый из 32 видов симметрии подвергнуть сдвигам и растяжениям косо, параллельно или перпендикулярно к имеющимся элементам симметрии, то мы получим возможные для кристаллических систем виды гомологичности.

В результате систематического решения этой задачи было найдено 155 различных между собой видов гомологичности. В это число входят также 32 вида симметрии.

Таблица 1

Элементы гомологичности	Их частный случай — элементы симметрии	
π — плоскость гомологичности	Плоскость симметрии .	P
λ_2 — двойная ось гомологичности	Двойная ось симметрии	G_2
λ_3 — тройная ось гомологичности	Тройная ось симметрии	G_3
λ_4 — четверная ось гомологичности	Четверная ось симметрии	G_4
λ_6 — шестерная ось гомологичности	Шестерная ось симметрии	G_6
$\lambda_{1i} = C$ — одинарная инверсионная ось гомологичности равнозначна центру инверсии	Одинарная инверсионная ось равнозначна центру инверсии . . .	$G_{1i} = C$
$\lambda_{2i} = \pi$ — двойная инверсионная ось гомологичности равнозначна плоскости гомологичности	Двойная инверсионная ось равнозначна плоскости симметрии . .	$G_{2i} = P$
$\lambda_{3i} = \lambda_2 + C$ — тройная инверсионная ось гомологичности равнозначна тройной оси гомологичности с центром инверсии	Тройная инверсионная ось равнозначна тройной оси симметрии с центром инверсии . .	$G_{3i} = G_3 + C$
$\lambda_{4i} \rightarrow \lambda_2$ — четверная инверсионная ось гомологичности всегда проходит через двойную ось гомологичности	Четверная инверсионная ось всегда проходит через двойную ось симметрии	$G_{4i} \rightarrow G_2$
$\lambda_{6i} = \lambda_3 + \pi$ — шестерная инверсионная ось гомологичности равнозначна тройной оси гомологичности с перпендикулярной к ней плоскостью гомологичности	Шестерная инверсионная ось равнозначна тройной оси симметрии с перпендикулярной к ней плоскостью симметрии . . .	$G_{6i} = G_3 + P$

По сингониям виды гомологичности распределяются следующим образом: триклинная — 49, моноклинная — 56, ромбическая — 18, тетрагональная — 10, тригональная — 10, гексагональная — 7 и кубическая — 5.

Следовательно, подавляющее число видов гомологичности — 123 из 155 — относится к низшей категории сингоний.

Таким образом, на основании гомологии мы получаем возможность производить более дробную классификацию конечных фигур с низкой симметрией. Это особенно важно потому, что бо́льшая часть известных нам кристаллических веществ (около 76%) относится к низшим сингониям.

Ленинградский горный институт

Поступило
8 XII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. С. Федоров. Новая геометрия как основа черчения, 1907. [2] Е. С. Федоров, Начало учения о фигурах, 1885. [3] В. И. Михеев, Тр. Федоровской научной сессии, 1949.