**Доклады Академии Наук СССР**
**1950. Том LXXI, № 4**

*ЭНЕРГЕТИКА*

Б. А. РЯБОВ

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕЖИМА УСТАНОВИВШИХСЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ

*(Представлено академиком В. С. Кулебакиным 4 X 1949)*

Рассмотрим сервосистему, состоящую из $n$ „линейных" элементов и из элемента, обобщенная координата которого может принимать только одно из двух крайних значений. Например, при рассмотрении системы автоматического регулирования таким элементом может явиться золотник, заслонка и т. д., мгновенно перекидывающиеся из одного крайнего положения в другое [1,2].

Координату системы с указанной Z-образной характеристикой, в отличие от остальных координат ($x$), описываемых линейными дифференциальными соотношениями, обозначим через $\sigma$. При этом предполагается: а) отклонения этой координаты равны по величине и противоположны по знаку; б) переход из одного крайнего положения в другое происходит мгновенно; в) переключение происходит только тогда, когда существует одно из соотношений для управляющей координаты $x_\sigma$:

$$\text{при } x_\sigma \geqslant x_{\sigma_0} + 0, \quad \dot{x}_\sigma \geqslant 0 \quad \text{имеем } \sigma = \sigma_0; \tag{1}$$

$$\text{при } x_\sigma \leqslant -(x_{\sigma_0} + 0), \quad \dot{x}_\sigma \leqslant 0 \quad \text{имеем } \sigma = -\sigma_0. \tag{2}$$

Пример такой зависимости показан на рис. 1. На рис. 2 показана связь между координатами $x_\sigma$ и $\sigma$, для общности рассмотрения, при наличии „мертвой зоны" (от $-x_{\sigma_0}$ до $+x_{\sigma_0}$). Таким образом, в некоторый момент времени $t_1$ величина координаты $x_\sigma$ становится равной наперед конструктивно определенной величине $+(x_{\sigma_0} + 0)$. Это служит сигналом для переключения координаты $\sigma$ в крайнее положение, например, в положение, в котором $\sigma = +\sigma_0 = \text{const}$ (I этап). В этом положении координата $\sigma$ остается до тех пор, пока в момент $t_2$ координата $x_\sigma$ не становится равной $x_\sigma = -(x_{\sigma_0} + 0)$, в этот момент координата $\sigma$ мгновенно становится равной другому крайнему значению $\sigma = -\sigma_0 = \text{const}$ (II этап), которое сохраняется до момента $t_3$, при котором $x_\sigma = x_{\sigma_0} + 0$ и вновь наступает состояние, при котором $\sigma = +\sigma_0 = \text{const}$ и т. д. При этом возможны три режима: 1) абсолютные величины координат системы с течением времени растут—система находится в режиме неустойчивых автоколебаний; 2) через некоторое время $\lim\limits_{t\to\infty} x_\sigma = a < |x_{\sigma_0}|$ и пере-

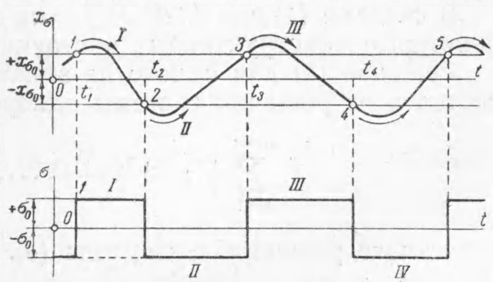


Рис. 1

ключения координаты $\sigma$ приостанавливаются; 3) через некоторое время с момента первого переключения координаты системы начинают изменяться с постоянной амплитудой и постоянным периодом — система вошла в режим установившихся автоколебаний. Для режима установившихся автоколебаний системы для начала $t$ и конца $t+\tau$ одного и того же этапа (например, для нечетного этапа) должны существовать следующие условия для любой координаты системы:

$$x_j(t) = -x_j(t+\tau), \quad \dot{x}_j(t) = -\dot{x}_j(t+\tau), \tag{3}$$

где $\tau$ — полупериод установившихся автоколебаний. Это означает, что данный этап начался при тех же начальных условиях, при которых начнется последующий этап (с соответствующим учетом изменения знака).

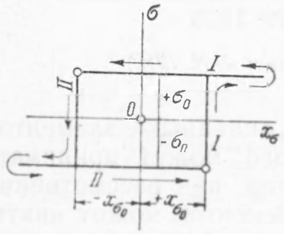
Рис. 2

В зависимости от начальных условий система может входить в режим установившихся автоколебаний или через „раскачивание“ (например, от „нулевых“ начальных условий) или через „затухание“.

В данной работе излагается метод, позволяющий: 1) установить существование режима установившихся автоколебаний системы и 2) определить величины основных параметров, характеризующих изменение любой координаты рассматриваемой системы в режиме установившихся автоколебаний.

Итак, пусть сервосистема имеет $n$ обобщенных координат, находящихся в линейной взаимосвязи. Тогда имеем $n$ линейных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_{k,1}(p)\, x_k = \delta A_1 \sigma_0, \ \ldots, \ \sum_{k=1}^{k=n} P_{k,n}(p)\, x_k = \delta A_n \sigma_0, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} \delta &= +1 \text{ при } x_\sigma \geqslant x_{\sigma_0} + 0, \quad \dot{x}_\sigma \geqslant 0, \\ \delta &= -1 \text{ при } x_\sigma \leqslant -(x_{\sigma_0} + 0), \quad \dot{x}_\sigma \leqslant 0. \end{aligned} \tag{5}$$

В системе (4) $p = d/dt$, $P_{k,j} = a_{kj}p^2 + b_{kj}p + c_{kj}$; $a_{kj}$, $b_{kj}$, $c_{kj}$, $A_j$* — некоторые конструктивные постоянные системы.

Решение (4) для одного из этапов для всякой координаты $x_j$ будет состоять из решения системы однородных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_{k,1}(p)\, x_k = 0, \ldots, \sum_{k=1}^{k=n} P_{k,n}(p)\, x_k = 0 \tag{6}$$

и частного решения $\bar{x}_j$ системы (4). Таким образом,

$$x_j = \sum_{m=1}^{m=2n} C_{mj} e^{\lambda_m t} + \bar{x}_j, \tag{7}$$

где $C_{mj}$ — произвольные постоянные интегрирования, $\lambda_m$ — корень характеристического уравнения системы**.

* Для случая, когда $\sigma$ является целой рациональной функцией от $t$, величина $A_j$ может быть целым полиномом от $p$.

** Предполагается, что все корни $\lambda_m$ различны и не равны нулю. Данное допущение только облегчает изложение, не внося ничего принципиально отличного в существо излагаемого.

Если предположить, что [3, 4]

$$x_\sigma = Ce^{\lambda t}, \quad x_j = B_j Ce^{\lambda t} \quad \text{при } j = 1, \ldots, n,$$

то значения постоянных множителей $B_j$ находятся как решения системы алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{k=n} P_{k,1}(\lambda) B_k = 0, \ldots, \sum_{k=1}^{k=n} P_{k,n}(\lambda) B_k = 0, \tag{8}$$

содержащей $n-1$ уравнение. При этом $B_\sigma \equiv 1$. Следовательно,

$$x_j = \sum_{k=1}^{k=2n} C_k B_j(\lambda_k) e^{\lambda_k t} + \bar{x}_j. \tag{9}$$

Наложение условий (3) на решение (9) дает следующую систему уравнений

$$\begin{gathered} \sum_{m=1}^{m=2n} C_m B_1(\lambda_m)(1 + e^{\lambda_m \tau}) = -2\bar{x}_1, \ldots, \sum_{m=1}^{m=2n} C_m B_n(\lambda_m)(1 + e^{\lambda_m \tau}) = -2\bar{x}_n \\ \sum_{m=1}^{m=2n} C_m \lambda_m B_1(\lambda_m)(1 + e^{\lambda_m \tau}) = 0, \ldots, \sum_{m=1}^{m=2n} C_m \lambda_m B_n(\lambda_m)(1 + e^{\lambda_m \tau}) = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

всего $2n$ уравнений для определения величин $2n$ неизвестных произвольных постоянных $C_m$ в режиме установившихся автоколебаний. Неизвестным будет также и $\tau$. Необходимым добавочным условием к $2n$ ранее данным является

$$\sum_{m=1}^{2n} C_m + \bar{x}_\sigma = x_{\sigma_0}. \tag{11}$$

Введем новую функцию

$$R_m(\tau) = C_m(1 + e^{\lambda_m \tau}) \quad m = 1, \ldots, 2n. \tag{12}$$

Тогда система (10), состоящая из $2n$ уравнений, перепишется в виде:

$$\begin{gathered} \sum_{m=1}^{m=2n} B_1(\lambda_m) R_m(\tau) = -2\bar{x}_1, \ldots, \sum_{m=1}^{m=2n} B_n(\lambda_m) R_m(\tau) = -2\bar{x}_n \quad (n \text{ уравнений}); \\ \sum_{m=1}^{m=2n} \lambda_m B_1(\lambda_m) R_m(\tau) = 0, \ldots, \sum_{m=1}^{m=2n} \lambda_m B_n(\lambda_m) R_m(\tau) = 0 \quad (n \text{ уравнений}), \end{gathered} \tag{13}$$

что является системой алгебраических линейных неоднородных уравнений относительно $R_m(\tau)$. Решая данную систему относительно $R_m(\tau)$, получим для случая $\sigma = \pm \sigma_0 = \text{const}$:

$$R_m(\tau) = R_{m0} = \text{const} \quad \text{при } m = 1, \ldots, 2n. \tag{14}$$

Когда характеристическое уравнение системы имеет нулевые или кратные корни, то $R_m$ становится функцией $\tau$, что не усложняет решения задачи, а требует некоторых дополнительных преобразований.

Таким образом:

$$C_m = \frac{R_m(\tau)}{1+e^{\lambda_m\tau}} = \frac{R_{m0}}{1+e^{\lambda_m\tau}} = C_m(\tau), \quad m = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{15}$$

Следовательно,

$$\sum_{m=1}^{m=2n} C_m(0) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{m=2n} R_{m0}, \quad \lim_{\tau\to\infty}\sum_{m=1}^{m=2n} C_m \leqslant \sum_{m=1}^{m=2n} R_{m0}. \tag{16}$$

Строим раздельно каждую $C_m(\tau)$, после чего находим

$$\Xi(\tau) = \sum_{m=1}^{m=2n} C_m(\tau) + \bar{x}_\sigma.$$

Проводя прямую $x_\sigma = x_{\sigma_0}$, находим точку пересечения ее с кривой $\Xi(\tau)$. Абсцисса этой точки пересечения и будет искомый $\tau$ — полупериод установившихся автоколебаний, а величины ординат точек пересечения прямой $\tau = \tau_0 = \text{const}$ с кривыми $C_m(\tau)$ — значения соответствующих $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$ в режиме установившихся автоколебаний (рис. 3).

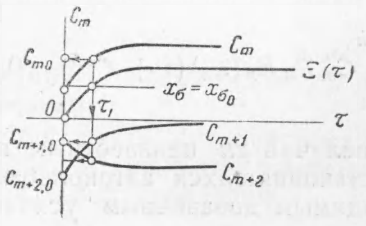


Рис. 3

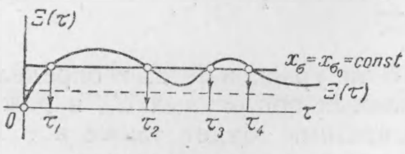


Рис. 4

Зная значения всех $C_m$, находим уравнение одной полуволны для любой координаты системы:

$$x_j = \sum_{m=1}^{m=2n} C_m B_j(\lambda_m) e^{\lambda_m t} = \bar{x}_j. \tag{17}$$

Может оказаться, что прямая $x_\sigma = x_{\sigma_0} = \text{const}$ не имеет точки пересечения с кривой $\Xi(\tau)$ — установившихся автоколебаний не возникает. В ряде случаев (чаще всего при комплексных корнях) $\Xi(\tau)$ может иметь несколько точек пересечения с прямой $x_\sigma = x_{\sigma_0} = \text{const}$ рис. 4), что указывает на наличие нескольких режимов установившихся автоколебаний. При этом необходимо проверить устойчивость установившихся автоколебаний для различных $\tau$.

Указанный метод можно распространить на ряд задач, например: об определении параметров установившихся автоколебаний в линейной системе, где одна из обобщенных координат изменяется с постоянной скоростью, или в системах, где переключение зависит от знака или значения скорости той или иной координаты, и т. д. Линейность исходных уравнений позволяет в ряде случаев получить решения задач методом суперпозиции.

Институт автоматики и телемеханики
Академии наук СССР

Поступило
4 X 1949

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Лурье, Автоматика и телемеханика, 5 (1947). [2] Л. С. Гольдфарб, там же, 5 (1947). [3] А. Н. Крылов, Собр. трудов, 2, О теории гирокомпаса Аншютц, АН СССР, 1943, стр. 129. [4] Э. Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, 1938, стр. 194.