МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЕ

https://doi.org/10.21122/1683-6065-2024-2-141-145
УДК 621.7.014

Поступила 03.04.2024
Received 03.04.2024

О ДВИЖЕНИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В РАСПЛАВЕ

М. Н. ВЕРЕЩАГИН, Ю. Д. ЧЕРНИЧЕНКО, С. В. ШИШКОВ,
Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого,
г. Гомель, Беларусь, пр. Октября, 48. E-mail: sv_shishkov@gstu.by, тел.: +375-29-684-16-30

Газовые включения в затвердевающих расплавах существенно влияют на качество литого материала. В жидких металлах всегда есть растворенные газы, которые в результате диффузии и химических реакций способствуют образованию новых и росту ранее появившихся включений. Решена математическая задача динамического поведения сферической полости, описываемая уравнением Навье-Стокса, а расплав рассматривается как вязкая несжимаемая жидкость. Получено выражение изменения радиуса сферической полости при ньютоновском поведении расплавов.

Ключевые слова. *Газовый пузырек, перегрев, пульсация давления, расплав, вязкость, теплоемкость, время.*
Для цитирования. *Верещагин, М. Н. О движении сферической полости в расплаве / М. Н. Верещагин, Ю. Д. Черниченко, С. В. Шишков // Литье и металлургия. 2024. № 2. С. 141–145. https://doi.org/10.21122/1683-6065-2024-2-141-145.*

ON THE MOTION OF A SPHERICAL CAVITY IN A MELT

M. N. VERESHCHAGIN, Yu. D. CHERNICHENKO, S. V. SHISHKOV,
P. O. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel, Belarus, 48, October ave.
E-mail: sv_shishkov@gstu.by, tel.: +375-29-684-16-30

Gas inclusions significantly influence the quality of solidifying melts. Dissolved gases in liquid metals, due to diffusion and chemical reactions, contribute to the formation and growth of new inclusions. The mathematical problem of the dynamic behavior of a spherical cavity is solved using the Navier-Stokes equation, treating the melt as a viscous incompressible fluid. An expression for the change in radius of a spherical cavity under Newtonian behavior of the melts is obtained.

Keywords. *Gas bubble, superheat, pressure pulsation, melt, viscosity, heat capacity, time.*
For citation. *Vereshchagin M. N., Chernichenko Yu. D., Shishkov S. V. On the motion of a spherical cavity in a melt. Foundry production and metallurgy, 2024, no. 2, pp. 141–145. https://doi.org/10.21122/1683-6065-2024-2-141-145.*

Газовые включения в затвердевающих расплавах существенно влияют на качество литого материала [1–3]. Перегрев расплава и пульсация давления отдачи из-за наличия пичковой структуры импульса излучения интенсифицируют рост газовых полостей и ведут к выбросу капель расплава в моменты времени, следующие непосредственно за резким падением удельной мощности излучения для режима свободной генерации [4, 5].

Поскольку газовые включения в расплавах имеют малые размеры, то можно считать, что они представляют собой газовые полости сферической формы. В реальных условиях скорость движения U_0 газовой полости радиуса R_0 в расплаве с кинематической вязкостью мала и, следовательно, число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \dfrac{2R_0U_0}{\nu} \ll 1$. Поэтому форма газовых полостей в процессе их движения будет оставаться сферической [6].

Исследуем динамическое поведение сферической полости с начальным радиусом R_0 и плотностью ρ_0, находящейся в момент времени $t = 0$ в центре капли расплава плотности ρ_k, и коэффициентами вязкости η и ξ и имеющей форму сферы радиуса R_k. Будем считать, что в точках сферической поверхности расплава действует давление:

$$p_k(t) = \rho_k q(t),\ 0 \le t \le t_0,\ q(0) = 1,\ q(t_0) = 0. \tag{1}$$

Никаких других сил к расплаву не приложено (полем силы тяжести будем пренебрегать).

Далее учтем, что изменение коэффициентов вязкости η и ξ вдоль расплава незначительно и, следовательно, их можно считать постоянными. Кроме того, примем во внимание, температура расплава T

больше температуры кристаллизации $T_{\text{кр}}$. Тем самым расплав можно рассматривать как вязкую жидкость, движение которой описывается уравнением Навье-Стокса [6]:

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+(\vec{U}\nabla)\vec{U}\right]=-\mathrm{grad}(p)+\eta\Delta\vec{U}+\left(\xi+\frac{\eta}{3}\right)\mathrm{grad}(\mathrm{div}(\vec{U})), \tag{2}$$

где $\vec{U}$ – вектор скорости частиц расплава; p – давление; Δ – оператор Гамильтона; $\Delta\equiv\nabla^2$ – оператор Лапласа.

Наконец учтем, плотность ρ расплава можно считать постоянной величиной. Следовательно, расплав можно рассматривать как вязкую несжимаемую жидкость, для которой уравнение непрерывности $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\vec{U}\rho)=0$ принимает вид:

$$\mathrm{div}(\vec{U})=0,\ \rho=\mathrm{const}. \tag{3}$$

Таким образом, считая расплав несжимаемой жидкостью, уравнение движения (2) существенно упрощается:

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+(\vec{U}\nabla)\vec{U}=-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}(p)+\eta\Delta\vec{U}, \tag{4}$$

где $\nu=\frac{\eta}{\rho}$ – кинематическая вязкость расплава.

Так как движение частиц сферической полости и капли расплава будет центрально-симметрическим относительно общего центра, то выберем сферическую систему координат (r,θ,φ), связанную с этим общим центром. Тогда в выбранной системе координат для частиц капли расплава, удаленных на расстояние r от центра, радиальную скорость которых обозначим через $U_r\equiv U>0$, а давление – через p, уравнение движения (4) и уравнение непрерывности (3) запишем в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}+\nu\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)\right]-\frac{2U}{r^2}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2U\right)=0. \tag{6}$$

Из условия несжимаемости (6) следует

$$r^2U=F(t). \tag{7}$$

Поскольку в любой момент рассматриваемого неустановившегося движения объем протекающего расплава через сферу любого радиуса r не зависит от последнего, то он является некоторой функцией времени, так как движение неустановившееся.

Используя соотношение (7), уравнение (5) преобразуем к виду

$$-\frac{F'(t)}{R}+U\frac{\partial U}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}. \tag{8}$$

Проинтегрировав уравнение (8) по r в пределах от R_k до радиуса $R=R(t)$ расширяющейся сферической полости ($R_0\le R=R(t)\le R_k$), получим

$$-\frac{F'(t)}{R}+\frac{F'(t)}{R_k}+\frac{1}{2}V^2=-\frac{1}{\rho}P(t)+\frac{1}{\rho}p_k(t), \tag{9}$$

где $V\equiv U(R,t)=\frac{dR}{dt}$ и $P(t)\equiv p(R,t)$ – скорость и давление частиц расплава на поверхности расширяющейся сферической полости, а скорость частиц капли расплава на его поверхности $U(R_k,t)$ равна 0, а давление $p(R_k,t)=p_k(t)$.

Принимая во внимание, что для частиц расплава, находящихся на поверхности расширяющейся сферической полости $r=R(t)$, справедливо соотношение (7), т.е. $R^2V=F'(t)$, то уравнение (9) преобразуется к виду

$$\left(1-\frac{R}{R_k}\right)R\frac{d^2R}{dt^2}+\frac{3}{2}\left(1-\frac{4R}{3R_k}\right)\left(\frac{dR}{dt}\right)^2=\frac{1}{\rho}\left(P(t)-p_k(t)\right). \tag{10}$$

Для расширения сферической полости необходимо, чтобы начальное давление в сферической полости p_0 было больше давления, действующего на каплю расплава в момент времени $t=0$, т.е.

$p_0 = P(t) > p_k(0) = p_k$. Кроме того, примем, что процесс расширения сферической полости происходит так быстро, что можно пренебречь потерей тепла, происходящим вследствие проводимости и излучения. Тогда расширение сферической полости подчиняется алгебраическому закону:

$$\frac{P(t)}{p_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_V}, \tag{11}$$

где C_p и C_V – удельные теплоемкости газа при постоянном давлении и объеме.

В этом случае уравнение (10) принимает вид

$$\left(1 - \frac{R}{R_k}\right) R \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{4R}{3R_k}\right)\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = C_0^2 \left[\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} - \frac{p_k}{p_0} q(t)\right], \tag{12}$$

где $C_0 = \sqrt{\dfrac{p_0}{\rho}}$.

Рассмотрим предельный случай, когда $R_k \to \infty$. Тогда уравнение (12) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \left(\frac{R}{R_0}\right)^3\right] = -\frac{2C_0^2}{3}\left\{\frac{1}{\gamma - 1}\frac{d}{dt}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3(\gamma-1)} - \frac{p_k}{p_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{R}{R_0}\right)^3 q(t)\right\}. \tag{13}$$

Интегрируя выражение (13) от 0 до *t* при начальных условиях

$$R_{t=0} = R_0, \quad \frac{dR}{dt}\Big|_{t=0} = 0, \tag{14}$$

получаем

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 = -\frac{2C_0^2}{3}\left\{\frac{1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3(\gamma-1)}\right] - \frac{p_k}{p_0}\int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{R}{R_0}\right)^3 q(t)\right\}. \tag{15}$$

Из уравнения (12) следует, что начальное ускорение в направлении радиуса можно определить по выражению

$$\frac{d^2R}{dt^2}\Big|_{t=0} = \frac{C_0^2}{R_0\left(1 - \dfrac{R_0}{R_k}\right)}\left[1 - \frac{p_k}{p_0}\right]. \tag{16}$$

Максимум скорости, который будет достигаться в некоторый момент времени t_m $(0 < t_m < t_0)$, можно найти из условия:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 \Big|_{t=0} = 0. \tag{17}$$

Из (15) и (17) получаем

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^{3-3\gamma}\Big|_{t=t_m} = \frac{1}{\gamma}\left\{1 + (\gamma - 1)\frac{p_k}{p_0}\left[1 + \int_0^{t_m}\left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \frac{dq(\tau)}{d\tau}\right]\right\}. \tag{18}$$

Если теперь принять, что $dq(\tau)$ меняется незначительно по сравнению с $\left(\dfrac{R}{R_0}\right)^3$ и, следовательно, $\dfrac{dq}{d\tau} \approx 0$, то уравнение (18) можно решить приближенно. В этом случае радиус сферической полости $R_m = R(t_m)$ определяем по выражению:

$$\frac{R_m}{R_0} = \frac{R}{R_0}\Big|_{t=t_m} = \left[\frac{\gamma}{1 + (\gamma - 1)\dfrac{p_k}{p_0} q(t_m)}\right]^{\frac{1}{3(\gamma-1)}}, \tag{19}$$

а максимальное значение скорости с учетом (19) находим из (15):

$$\left(\frac{R_m}{R_0}\right)^2=\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\Big|_{t=t_m}=\frac{2C_0^2}{3}\left\{\left[\frac{1+(\gamma-1)\dfrac{p_k}{p_0}q(t_m)}{\gamma}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}-\frac{p_k}{p_0}q(t_m)\right\}. \tag{20}$$

Для решения нелинейного интегрально-дифференциального уравнения (15) будем, как и ранее, считать, что $q'(\tau)\approx 0$ и, следовательно, $q(\tau)\approx 1$. Введя обозначения

$$y=\frac{R}{R_0}\varepsilon^{\frac{1}{3\gamma}},\quad \delta=\frac{\varepsilon^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1+\varepsilon},\quad \varepsilon=\frac{(\gamma-1)p_k}{p_0}, \tag{21}$$

уравнение (15) с учетом сделанных выше приближений запишем в виде

$$\frac{dy}{dt}y^{\frac{3}{2}}[1-\delta y^3(1+y^{-3\gamma})]^{-\frac{1}{2}}=\varepsilon^{\frac{5}{6\gamma}}\sqrt{\frac{2C_0^2(1+\varepsilon)}{3R_0^2(\gamma-1)}}. \tag{22}$$

Теперь заметим, при $\frac{p_k}{p_0}<<1$ и $r>1$ следует, что $\varepsilon<<1$, $\delta<<1$ и $\delta y^3<<1$. Тогда уравнение (22) легко интегрируется, если разложить его левую часть по малому параметру δ. Ограничиваясь в уравнении (22) линейным членом по δ, после интегрирования с начальным условием

$$y\Big|_{t=0}=\varepsilon^{\frac{1}{3\gamma}}, \tag{23}$$

получаем

$$y^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{22}\delta y^{\frac{11}{2}}+\frac{5}{2(11-6y)}\delta y^{\frac{11-6y}{2}}-\varepsilon^{\frac{3}{6y}}-\frac{5}{22}\delta y^{\frac{11}{6y}}-\frac{5}{2(11-6y)}\delta\varepsilon^{\frac{11-6y}{2}}=$$
$$=\frac{5}{2}\varepsilon^{\frac{5}{6\gamma}}\sqrt{\frac{2C_0^2(1+\varepsilon)}{3R_0^2(\gamma-1)}}t,\quad \gamma\neq\frac{11}{6}, \tag{24}$$

или в прежних обозначениях:

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{2(11-6\gamma)}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{11-6\gamma}{2}}+\frac{5}{22(1+\varepsilon)}\varepsilon\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{11}{2}}=\frac{5C_0}{2R_0}\sqrt{\frac{2(1+\varepsilon)}{3(\gamma-1)}}t+\frac{3(9-4\gamma)}{2(11-6\gamma)}+\frac{5\varepsilon}{22(1+\varepsilon)}. \tag{25}$$

Поскольку ε мало, а $\frac{R}{R_0}>1$ и $\gamma>1$, то $\frac{11-6\gamma}{2}<\frac{5}{2}$ и, следовательно, решение упростится:

$$\frac{R}{R_0}\cong\left[\frac{5C_0}{2R_0}\sqrt{\frac{2}{3(\gamma-1)}}t+\frac{3(9-4\gamma)}{2(11-6\gamma)}\right]^{\frac{2}{5}},\quad \gamma\neq\frac{11}{6}. \tag{26}$$

При $\gamma=\frac{11}{6}$ в выражении (25) появится логарифмический член $\ln\left(\frac{R}{R_0}\right)$. Тогда в решении (26) можно ограничиться только первым членом:

$$\frac{R}{R_0}\approx\left[\frac{5C_0^2}{2R_0^2}\right]^{\frac{1}{5}}t^{\frac{2}{5}},\quad \gamma=\frac{11}{6}. \tag{27}$$

Таким образом, радиус сферической полости в рассматриваемом приближении растет пропорционально $t^{\frac{2}{5}}$:

$$R\approx R_0\left[\frac{5C_0^2}{2R_0^2}\sqrt{\frac{2}{3(\gamma-1)}}\right]^{\frac{2}{5}}t^{\frac{2}{5}}. \tag{28}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ефимов, В. А.** Разливка и кристаллизация стали / В. А. Ефимов.– М.: Металлургия, 1976.– 552 с.
2. **Флемингс, М.** Процессы затвердевания / М. Флемингс.– М.: Мир, 1977.– 423 с.
3. **Явойский, В. И.** Неметаллические включения и свойства стали / В. И. Явойский, Ю. И. Рубенчик, А. П. Окенко.– М.: Металлургия, 1980.– 176 с.
4. О некоторых особенностях процессов разрушения металлов сфокусированным излучением лазера / Б. М. Жиряков [и др.] // Журнал технической физики.– 1971.– № 5.– С. 1037–1042.
5. О некоторых закономерностях выноса материала из зоны воздействия излучения лазера / Б. М. Жиряков [и др.] // Квантовая электроника: сб. ст. / под ред. акад. Н. Т. Басова.– М.: Сов. радио, 1973.– Вып. 1 (18).– С. 119–121.
6. **Ландау, Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.– 736 с.

REFERENCES

1. **Efimov V.A.** *Razlivka i kristallizacija stali* [Steel casting and crystallization]. Moscow, Metallurgija Publ., 1976, 552 p.
2. **Flemings M.** *Processy zatverdevanija* [Solidification processes]. Moscow, 1977, Mir Publ., 423 p.
3. **Javojskij V.I., Rubenchik Ju. I., Okenko A.P.** *Nemetallicheskie vkljuchenija i svojstva stali* [Non-metallic inclusions and properties of steel]. Moscow, Metallurgija Publ., 1980, 176 p.
4. **Zhirjakov B.M., Rykalin N.N., Uglov A.A. [et al.].** O nekotoryh osobennostjah processov razrushenija metallov sfokusirovannym izlucheniem lazera [On some features of the processes of destruction of metals by focused laser radiation]. *Zhurnal tehnicheskoj fiziki = Journal of Technical Physics,* 1971, no. 5, pp. 1037–1042.
5. **Zhirjakov B.M., Rykalin N.N., Uglov A.A. [et al.].** O nekotoryh zakonomernostjah vynosa materiala iz zony vozdejstvija izluchenija lazera [On some patterns of material removal from the zone affected by laser radiation]. *Kvantovaja jelektronika: sb. st. = Quantum electronics: collection articles (ed. akad. N.T. Basov).* Moscow, Sov. radio Publ., 1973, vol. 1 (18), pp. 119–121.
6. **Landau L.D., Lifshic E.M.** *Teoreticheskaja fizika. T. 6. Gidrodinamika* [Theoretical physics. Vol. 6. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit. Publ., 1986, 736 p.