Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 4

МАТЕМАТИКА

М. А. УЛАНОВСКИЙ

О СТАЦИОНАРНЫХ ГРУППАХ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ ЛИНЕЙНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ И АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 4 I 1950)

Пусть в X_n задана линейная проективная связность таблицей линейных дифференциальных форм $\| \omega_\beta^\alpha \|$ $(\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n;\ \omega_0^0 = 0)$.

Пусть $\omega_\beta^\alpha(x, dx) = \Pi_{\beta k}^\alpha(x^1 \ldots x^n)\, dx^k$ $(\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n; \quad k = 1, \ldots, n)$.

В дальнейшем мы будем считать выполненными следующие условия:

$$\omega_0^i(x, x) = \Pi_{0k}^i x^k = x^i;$$

$$\omega_k^\alpha(x, x) = 0$$

$$(i, k = 1, \ldots, n;\ \alpha = 0, 1, \ldots, n).$$

Таблицу $\| \omega_\beta^\alpha \|$, удовлетворяющую этим условиям, мы будем называть нормальной таблицей, а координаты $x^1 \ldots x^n$ — нормальными координатами, ей соответствующими (нормальные координаты могут быть введены в некоторой окрестности точки $O(0, \ldots, 0)$.

Изучая свойства стационарной группы движений, удобно так выбирать нормальную таблицу $\| \omega_\beta^\alpha \|$, чтобы началом соответствующей ей нормальной системы координат служила неподвижная точка этой группы.

Легко показать, что имеет место следующая теорема.

Теорема. *Всякое движение пространства линейной проективной связности, оставляющее неподвижным начало некоторой нормальной системы координат, представляет собой (в этих координатах) дробно-линейное преобразование:*

$$x^{i'} = \frac{a_k^i x^k}{1 + a_k^0 x^k} \quad (i, k = 1, \ldots, n;\ a_k^i = \text{const}, \quad a_k^0 = \text{const}).$$

Матрица $\| A_\beta^\alpha \|$ $(\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n)$, *преобразовывающая нормальную таблицу* $\| \omega_\beta^\alpha(x, dx) \|$ *в таблицу* $\| \omega_\beta^\alpha(x', dx') \|$, *определяется следующими формулами:*

$$A_0^0 = 1, \quad A_0^i = 0,$$

$$A_j^i = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{a_k^i x^k}{1 + a_k^0 x^k}\right),$$

$$A_i^0 = \frac{a_i^0}{1 + a_k^0 x^k} \quad (i, j, k = 1, \ldots, n).$$

Найдем τ^i_j $(i, j = 1, \ldots, n)$ из уравнений: $\Pi^i_{0k}\tau^k_j = \delta^i_j$ $(i, j, k = 1, \ldots, n)$; уравнения:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\, x^{j'} = \tau^i_j (x^1 \ldots x^n)\, B^j_k x^{k'},$$

$$\frac{\partial B^i_j}{\partial x^{k'}}\, x^{k'} = - B^k_j \Pi^i_{kl} (x^1 \ldots x^n)\, \tau^l_m\, (x^1 \ldots x^n)\, x^{m'} - B^i_{(j} B^0_{k)} x^{k'},$$

$$\frac{\partial B^0_i}{\partial x^{k'}}\, x^{k'} = - B^k_i \Pi^0_{kl} (x^1 \ldots x^n)\, \tau^l_m\, (x^1 \ldots x^n)\, x^{m'} - B^0_i B^0_k x^{k'}$$

$$(i,\ \ j,\ \ k,\ \ l,\ \ m = 1, \ldots, n)$$

определяют матрицу самого общего преобразования нормальной таблицы $\| \omega^\alpha_\beta \|$: $\| A^\alpha_\beta \| = \| B^\alpha_\beta \|^{-1}$ и соответствующее преобразование нормальных координат:

$$x^i = x^i (x^{1'} \ldots x^{n'}) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Рассмотрим преобразование нормальных координат:

$$x^i = \varphi^i (x^{1'} \ldots x^{n'};\, y^1 \ldots y^n) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{$*$}$$

удовлетворяющее условиям:

$$\varphi^i (0, \ldots, 0; y^1 \ldots y^n) = y^i,$$
$$\| A^\alpha_\beta (0, \ldots, 0;\ y^1 \ldots y^n) \| = E \tag{$**$}$$
$$(i = 1, \ldots, n; \quad E \text{ — единичная матрица}).$$

Существует такая окрестность Ω точки $O(0, \ldots, 0)$, что условия $(**)$ однозначно определяют локальное преобразование координат $(*)$, если $(y^1 \ldots y^n)$ принадлежит Ω.

Пусть теперь $x^1 \ldots x^n$ — некоторая предпочитаемая система координат в обычном проективном пространстве. Пусть $f^i (x^1 \ldots x^n; y^1 \ldots y^n) = \varphi^i (x^1 - y^1, \ldots, x^n - y^n;\ y^1 \ldots y^n)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Формулы $z^i = f^i (x^1 \ldots x^n; y^1 \ldots y^n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ определяют отображение произвольной упорядоченной пары точек (X, Y) некоторой окрестности начала координат на точку Z. Обозначим это отображение через T.

Проективное преобразование S мы будем называть **а в т о м о р ф и з м о м** отображения T, если оно смещает точку Z, соответствующую произвольной паре (X, Y), в точку $S(Z)$, соответствующую преобразованной паре $(S(X), S(Y))$.

Т е о р е м а. *Если преобразование* S:

$$x^{i'} = \frac{a^i_k x^k}{1 + a^0_k x^k} \quad (i, k = 1, \ldots, n)$$

есть движение пространства линейной проективной связности (записанное в нормальных координатах), то оно является автоморфизмом соответствующего отображения T.

Заметим, что для нормальных пространств проективной связности справедлива и обратная теорема, так как отображение T определяет геодезические линии.

„Около" точки $O(0, \ldots, 0)$ отображение T обладает следующим свойством: с точностью до бесконечно малых 2-го порядка (а для пространств без кручения — 3-го порядка) паре (X, Y) соответствует точка X; в обычном проективном пространстве паре (X, Y) всегда соответствует точка X.

Указанные выше свойства отображения T позволяют доказать следующую геометрическую теорему.

Теорема. *Если нормальное пространство линейной проективной связности допускает нетривиальное движение S, сохраняющее неподвижными некоторую точку O и все ориентированные направления в ней, то в некоторой окрестности точки O оно эквивалентно обычному проективному пространству.*

Доказательство основано на следующем замечании: если существует хоть одна пара точек (X, Y), которой в силу T соответствует точка $Z \neq X$, то паре $S^p(X)$, $S^p(Y)$ (или $S^{-p}(X)$, $S^{-p}(Y)$), $p \to \infty$, соответствует точка $S^p(Z)$ $(S^{-p}(Z))$, с точностью 2-го порядка не совпадающая с $S^p(X)$ $(S^{-p}(X))$.

Отметим следствие:

Следствие. *Стационарная группа движений n-мерного нормального пространства линейной проективной связности, не сводящегося к обычному проективному пространству, может зависеть не более чем от n^2-1 параметров* (известно, что полная группа движений может зависеть в общем случае не более чем от $(n^2-1)+n$ параметров ([1])).

Стационарная группа движений нормального пространства проективной связности, ассоциированного с группой Ли нулевого ранга G ([3]), или группа проективных изоморфизмов группы G, отличается от стационарной группы ее аффинных изоморфизмов лишь преобразованиями, сохраняющими ориентированные направления в неподвижной точке. Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема. *Группа проективных изоморфизмов проективно не плоской группы Ли нулевого ранга совпадает с группой ее аффинных изоморфизмов.*

(Аналогичная теорема известна для полупростых групп ([3]).)

В заключение заметим, что построения, аналогичные приведенным выше, можно произвести и для пространств линейной аффинной связности. Рассматривая отображение, аналогичное отображению T, можно легко доказать, что стационарная группа движений n-мерного пространства линейной аффинной связности может зависеть в общем случае не более чем от (n^2-n) параметров (известно, что полная группа движений может зависеть в общем случае не более чем от $(n^2-n)+n$ параметров ([2])).

Поступило
7 XII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. П. Егоров, ДАН, **61**, № 4 (1948). [2] И. П. Егоров, ДАН, **57**, № 9 (1947). [3] E. Cartan, Journ. de Math. Pur. et Appl., 6, fasc. 1 (1927).