Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 4

МАТЕМАТИКА

Т. М. ТЕР-МИКАЭЛЯН

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА ГАРМОНИЧЕСКОЙ МЕРЫ МНОЖЕСТВА НА НЕКОТОРЫХ СПРЯМЛЯЕМЫХ КРИВЫХ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 30 I 1950)

Обозначим через $D(q)$ произвольную конечную односвязную область, содержащую внутри себя круг $|z|<1$, ограниченную спрямляемой кривой Γ и удовлетворяющую условию: отношение длины $L(\gamma)$ произвольной дуги γ границы Γ к ее хорде $d(\gamma)$ ограничено одной и той же константой q, $L(\gamma)/d(\gamma)<q$.

Теорема. *При конформном отображении $w=F(z)$, $F(0)=0$, области $D(q)$ на круг $|w|<1$ произвольному множеству E_z на границе Γ области $D(q)$ меры ε соответствует на окружности $|w|=1$ множество E_w, мера которого удовлетворяет неравенству*

$$\operatorname{mes} E_w > M\varepsilon^{\delta},$$

где δ — константа, $\delta>1$, зависящая лишь от q, а M — константа, зависящая от q и длины S границы Γ.

М. А. Лаврентьевым [1] в тех же условиях была получена следующая оценка: $\operatorname{mes} E_w < 2\pi\varepsilon^{\omega}$, где ω — константа, зависящая лишь от q. При доказательстве формулированной теоремы мы используем методы, аналогичные развитым в работе [1]. Теорема является следствием двух лемм, доказываемых ниже.

Определение. Мы скажем, что область D, ограниченная кривой Γ и содержащая точку $z=0$, удовлетворяет условию $C(h,k)$, если существуют две такие константы h и k, $0<h<1$, $0<k<1$, что, какова бы ни была дуга γ границы Γ и какова бы ни была система дуг $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$, принадлежащих γ, из неравенства $\sum L(\gamma_i)>hL(\gamma)$ следует неравенство $\sum \eta_i > k\eta$, где η_i, η — длины дуг окружности $|w|=1$, соответствующие при конформном отображении $w=F(z)$, $F(0)=0$, области D на круг $|w|<1$ дугам γ_i, γ, причем дуги γ_i попарно без общих точек.

Лемма 1. *Пусть D — область, содержащая внутри себя точку $z=0$; $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ — конечная система дуг спрямляемой границы Γ области D с суммой длин, равной ε, и η — сумма длин дуг окружности $|w|=1$, соответствующих при конформном отображении $w=F(z)$, $F(0)=0$, области D на круг $|w|<1$ дугам $\gamma_1,\ldots\gamma_n$. Если область D удовлетворяет условию $C(h,k)$, то η удовлетворяет неравенству*

$$\eta > M\varepsilon^{\delta},$$

где δ — константа, $\delta>1$, зависящая от констант h и k условия $C(h,k)$, а M — константа, зависящая от h и длины S границы Γ.

Будем считать, что $\varepsilon < hS$ и что дуги $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ перенумерованы в порядке их следования при положительном обходе границы Г. Исходя из системы дуг $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, построим систему попарно непересекающихся дуг $\gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_{n_1}^{(1)}$ следующим образом. Обозначим через δ дугу, отложенную от начала дуги γ_1, содержащую дугу γ_1, длина которой удовлетворяет условию $L(\gamma_1) = hL(\delta)$. Если δ не имеет ни одной общей точки с дугами $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$, то полагаем $\delta = \gamma_1^{(1)}$. Если же δ имеет общие точки с дугами $\gamma_2, \ldots, \gamma_s$, то строим дугу δ', отложенную от начала дуги γ_1, содержащую δ, длина которой удовлетворяет условию $L(\gamma_1) + \ldots + L(\gamma_s) = hL(\delta')$. Так поступая, мы придем к дуге δ^*, отложенной от начала дуги γ_1, содержащей дуги $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_1}$, не имеющей ни одной общей точки с дугами $\gamma_{k_1+1}, \ldots, \gamma_n$ и длина которой удовлетворяет условию $L(\gamma_1) + \ldots + L(\gamma_{k_1}) = hL(\delta^*)$. При этих условиях полагаем $\gamma_1^{(1)} = \delta^*$ и, так как $\varepsilon < hS$, то $L(\gamma_1^{(1)}) < S$. Отправляясь от дуги γ_{k_1+1}, построим аналогично дугу $\gamma_2^{(1)}$, отложенную от начала дуги γ_{k_1+1}, содержащую дуги $\gamma_{k_1+1}, \ldots, \gamma_{k_2}$, не имеющую ни одной общей точки с дугами $\gamma_{k_2+1}, \ldots, \gamma_n$ и длина которой удовлетворяет условию: $L(\gamma_{k_1+1}) + \ldots + L(\gamma_{k_2}) = hL(\gamma_2^{(1)})$, причем $L(\gamma_1^{(1)}) + L(\gamma_2^{(1)}) < S$.

Продолжая так, мы придем к дуге δ, начало которой совпадает с началом дуги γ_{k_i+1}, которая содержит дуги $\gamma_{k_i+1}, \ldots, \gamma_n$ и длина которой удовлетворяет условию $L(\gamma_{k_i+1}) + \ldots + L(\gamma_n) = hL(\delta)$. Если при этом дуга δ не имеет ни одной общей точки с ранее построенными дугами $\gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_i^{(1)}$, то, положив $\delta = \gamma_{i+1}^{(1)}$, мы получим искомую систему дуг $\gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_{n_1}^{(1)}$, причем $L(\gamma_1^{(1)}) + \ldots + L(\gamma_{n_1}^{(1)}) < S$. В противном случае пусть дуга δ имеет общие точки с дугами $\gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_{j+1}^{(1)}$, причем пусть дуга γ_{k_j+m+1} первая, не имеющая общих точек с дугой δ. Построим тогда дугу δ', начало которой совпадает с началом дуги γ_{k_i+1}, которая содержит дуги $\gamma_{k_i+1}, \ldots, \gamma_n$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_1}, \ldots, \gamma_{k_j+1}, \ldots, \gamma_{k_j+m}$ и длина которой удовлетворяет условию $L(\gamma_{k_i+1}) + \ldots + L(\gamma_n) + L(\gamma_1) + \ldots + L(\gamma_{k_j+m}) = hL(\delta')$. Покажем при этом, что если $k_j + m < k_{j+1}$, т. е. дуга γ_{k_j+m} не последняя среди дуг $\gamma_{k_j+1}, \ldots, \gamma_{k_{j+1}}$, принадлежащих дуге $\gamma_{j+1}^{(1)}$, то дуга δ' необходимо имеет общие точки с дугой γ_{k_j+m+1}. Действительно, предположим, что это не так, и пусть γ^* — дуга, соединяющая начало дуги γ_{k_j+1} с началом дуги γ_{k_j+m+1} и содержащаяся в дуге $\gamma_{j+1}^{(1)}$; пусть δ^* — дуга, соединяющая начало дуги γ_{k_i+1} с началом дуги γ_{k_j+1} и содержащаяся в дуге δ'. Ясно, что $L(\delta^*) + L(\gamma^*) \geqslant L(\delta')$. Далее, по построению, $L(\gamma_{k_i+1}) + \ldots + L(\gamma_n) + L(\gamma_1) + \ldots + L(\gamma_{k_j}) > hL(\delta^*)$, $L(\gamma_{k_j+1}) + \ldots + L(\gamma_{k_j+m}) > hL(\gamma^*)$, откуда имеем $L(\gamma_{k_i+1}) + \ldots + L(\gamma_n) + L(\gamma_1) + \ldots + L(\gamma_{k_j+m}) > hL(\delta^*) + hL(\gamma^*) \geqslant hL(\delta')$, что противоречит предположению о длине δ'. Итак, γ_{k_j+m+1}, имеет общие точки с δ', и мы будем строить дугу δ'', аналогичную дуге δ', но содержащую еще и γ_{k_j+m+1} и длина которой удовлетворяет условию $L(\gamma_{k_i+1}) + \ldots + L(\gamma_n) + L(\gamma_1) + \ldots + L(\gamma_{k_j+m+1}) = hL(\delta'')$. Если дуга γ_{k_j+m+2} опять принадлежит дуге $\gamma_{j+1}^{(1)}$, то δ'' будет иметь общие точки с дугой γ_{k_j+m+2}. Таким образом, дуга δ'', которую мы строим, отправляясь от дуги γ_{k_i+1}, необходимо содержит все интервалы $\gamma_{k_j+1}, \ldots, \gamma_{k_{j+1}}$, принадлежащие той дуге $\gamma_{j+1}^{(1)}$, с точками которой дуга δ'' имеет хоть одну общую точку, а потому δ'' содержит и всю дугу $\gamma_{j+1}^{(1)}$. Следовательно, конец дуги δ'' всегда лежит между дугами $\gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_i^{(1)}$. Пусть, таким образом, дуга δ'' содержит дуги $\gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_r^{(1)}$ и не имеет общих точек с дугами $\gamma_{r+1}^{(1)}, \ldots, \gamma_i^{(1)}$. Тогда дуги $\gamma_{r+1}^{(1)}, \ldots, \gamma_i^{(1)}, \delta''$ образуют искомую систему дуг, которые мы вновь перенумеруем, обозначив $\gamma_{r+1}^{(1)}$ через $\gamma_1^{(1)}, \ldots, \delta'' = \gamma_{n_1}^{(1)}$. При этом мы перенумеруем и дуги $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, начав нумерацию с дуги γ_{k_r+1}.

Итак, мы построили систему попарно не пересекающихся дуг $\gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_{n_1}^{(1)}$, причем

$$
\begin{aligned}
L(\gamma_1) + \ldots + L(\gamma_{k_1}) &= hL(\gamma_1^{(1)}),\\
L(\gamma_{k_1+1}) + \ldots + L(\gamma_{k_2}) &= hL(\gamma_2^{(1)}),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\\
L(\gamma_{k_{n_1-1}+1}) + \ldots + L(\gamma_n) &= hL(\gamma_{n_1}^{(1)}),
\end{aligned}
\tag{$*$}
$$

откуда $L(\gamma_1) + \ldots + L(\gamma_n) = h\{L(\gamma_1^{(1)}) + \ldots + L(\gamma_{n_1}^{(1)})\}$, или, обозначив $L(\gamma_1^{(1)}) + \ldots + L(\gamma_{n_1}^{(1)}) = \varepsilon_1$, будем иметь $\varepsilon = h\varepsilon_1$, причем $\varepsilon_1 < S$, так как $\varepsilon < hS$.

Если обозначить через η_1 сумму длин дуг окружности $|w| = 1$, в которые переходят дуги $\gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_{n_1}^{(1)}$, то, в силу равенств $(*)$ и условия $C(h, k)$, будем иметь, что $\eta > k\eta_1$.

Предположим, что $\varepsilon_1 < hS$. Тогда, исходя из системы дуг $\gamma_1^{(1)}, \ldots \gamma_{n_1}^{(1)}$, мы построим систему дуг $\gamma_1^{(2)}, \ldots, \gamma_{n_2}^{(2)}$ так же, как, исходя из системы дуг $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, мы построили систему $\gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_{n_1}^{(1)}$. Если обозначить через $\varepsilon_2 = L(\gamma_1^{(2)}) + \ldots + L(\gamma_{n_2}^{(2)})$ и через η_2 сумму длин дуг на окружности $|w| = 1$, которые соответствуют дугам $\gamma_1^{(2)}, \ldots, \gamma_{n_2}^{(2)}$, то будем иметь $\varepsilon_1 = h\varepsilon_2$ и $\eta_1 > k\eta_2$.

Пусть, продолжая так, мы придем к системе дуг $\gamma_1^{(p-1)}, \ldots, \gamma_{n_{p-1}}^{(p-1)}$, причем, обозначив через ε_{p-1} сумму их длин, через ε_{p-2} сумму длин дуг $\gamma_1^{(p-2)}, \ldots, \gamma_{n_{p-2}}^{(p-2)}$, через η_{p-1} и η_{p-2} сумму длин дуг на окружности $|w| = 1$, в которые переходят соответственно дуги $\gamma_1^{(p-1)}, \ldots, \gamma_{n_{p-1}}^{(p-1)}$ и дуги $\gamma_1^{(p-2)}, \ldots, \gamma_{n_{p-2}}^{(p-2)}$, будем иметь $\varepsilon_{p-2} = h\varepsilon_{p-1}$ и $\eta_{p-2} > k\eta_{p-1}$.

Предположим теперь, что $\varepsilon_{p-1} < S$, но при этом $\varepsilon_{p-1} \geqslant hS$. Обозначим тогда всю границу Γ через $\gamma^{(p)}$, через ε_p ее длину ($\varepsilon_p = S$) и через η_p длину дуги окружности $|w| = 1$, соответствующей дуге $\gamma^{(p)}$ ($\eta_p = 2\pi$). Будем иметь: $\varepsilon_{p-1} \geqslant h\varepsilon_p$ и $\eta_{p-1} > k\eta_p = 2\pi k$.

Сравнивая полученные соотношения, имеем: $\varepsilon = h\varepsilon_1 = h^2\varepsilon_2 = \ldots \ldots = h^{p-1}\varepsilon_{p-1}$ и $\eta > k\eta_1 > \ldots > k^{p-1}\eta_{p-1} > k^p\eta_p = 2\pi k^p$. Кроме того, $S > \varepsilon_{p-1} = \dfrac{\varepsilon}{h^{p-1}}$, откуда $p < 1 - \dfrac{\ln S}{\ln h} + \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln h}$, и так как $k < 1$, то

$$
\eta > 2\pi k^p > 2\pi k^{1 - \frac{\ln S}{\ln h}} k^{\frac{\ln \varepsilon}{\ln h}} = M\varepsilon^{\frac{\ln k}{\ln h}} = M\varepsilon^{\delta},
$$

$\delta = \delta(k, h)$, $M = M(h, S)$, причем, уменьшая k и увеличивая h, можем считать, что $\delta > 1$.

Лемма 2. *Всякая область $D(q)$ удовлетворяет свойству $C(h, k)$, где константы h и k зависят лишь от q.*

Если это не так, то по любому $\alpha > 0$ найдется такая дуга γ и на ней система дуг $\gamma_1'', \ldots, \gamma_m''$ таких, что $\sum L(\gamma_i'') > (1 - \alpha) L(\gamma)$ и $s'' < {}^1/_2 S$, где s'' — сумма длин дуг окружности $|w| = 1$, в которые при конформном отображении $w = F(z)$, $F(0) = 0$, области $D(q)$ на круг $|w| < 1$ переходят дуги $\gamma_1'', \ldots, \gamma_m''$, а S — длина дуги окружности $|w| = 1$, соответствующей при том же отображении дуге γ.

Рассмотрев дуги, дополняющие дуги $\gamma_1'', \ldots, \gamma_m''$ до дуги γ, мы можем сказать, что если область $D(q)$ не удовлетворяет свойству $C(h, k)$, то по любому $\alpha > 0$ найдется дуга γ границы Γ и система дуг $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, принадлежащих γ и таких, что $\sum L(\gamma_i) < \alpha L(\gamma)$ и при этом $s > {}^1/_2 S$, где S есть длина дуги η окружности $|w| = 1$, соответствующей дуге γ, а s — сумма длин дуг $\eta_1, \ldots, \eta_n$ окружности $|w| = 1$, соответствующих дугам $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Покажем, что это невозможно.

Ясно, что в доказательстве нуждается лишь тот случай, когда $L(\gamma) \to 0$ при $\alpha \to 0$. Рассмотрим тогда окружность K радиуса $r = L(\gamma)/2q$, внутренность которой принадлежит области $D(q)$ и центр z_0 которой удален от концов дуги γ на расстояние не большее, чем $\frac{L(\gamma)}{2} + \frac{L(\gamma)}{2q}$. В силу свойств границы Γ такая окружность всегда существует. Совершим замену переменной, положив $z' = \frac{z - z_0}{r}$, и обозначим через $D', \Gamma', \gamma', \gamma_1', \ldots, \gamma_n'$ соответственно образы $D, \Gamma, \gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Ясно, что отношение длины любой дуги γ' границы Γ', к ее хорде ограничено тем же числом p. Далее, область D' содержит круг $|z'| < 1$ и $\sum L(\gamma_i') < 2q\alpha$. Отобразим конформно функцией $w = \Phi(z')$, $\Phi(0) = 0$, область D' на круг $|w| < 1$ и обозначим через S' длину дуги окружности, соответствующей при этом отображении дуге γ', а через s' — сумму длин дуг окружности, соответствующих дугам $\gamma_1', \ldots, \gamma_n'$. В силу неравенства М. А. Лаврентьева $s' < 2\pi (2q\alpha)^{\omega}$ и, следовательно, $s' \to 0$ при $\alpha \to 0$. Покажем, что это противоречит условию $s > {}^1/_2 S$. Действительно, в силу выбора точки z_0 и свойств границы Γ, угол, под которым видна дуга γ' из точки $z' = 0$, ограничен сверху, а относительное расстояние (²) дуги γ' в области D' ограничено снизу константами, зависящими лишь от q; следовательно, точно так же ограничен угол, образованный окружностями, ортогональными к окружности $|w| = 1$ и соединяющими точку $w_0 = F(z_0)$ с концами дуги η. Так как $s > {}^1/_2 S$, то и сумма углов β_i, где β_i — угол, образованный окружностями, ортогональными к окружности $|w| = 1$ и соединяющими концы дуги η_i с точкой w_0, ограничена снизу константой, зависящей лишь от q. Это противоречит тому, что $s' \to 0$, и лемма доказана.

Сектор математики
Академии наук Арм.ССР

Поступило
28 I 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Лаврентьев, Матем. сборн., 1 (43), 6, 815 (1936). [2] М. А. Лаврентьев, ДАН, 4, № 1, 207 (1936).