Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 4

МАТЕМАТИКА

К. СИТНИКОВ

О НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 II 1950)

1. В этой заметке рассматриваются такие непрерывные отображения φ евклидова n-мерного пространства R^n в себя, при которых прообразы $\varphi^{-1}y$ всех точек $y \in \varphi R^n$ имеют равномерно ограниченные диаметры (меньшие, чем некоторое $\alpha > 0$). Отображения, удовлетворяющие этому условию, введены в рассмотрение П. С. Александровым ((1), стр. 102, (2), стр. 203) под названием α-отображений и имеют многочисленные применения в различных вопросах топологии. Польский математик Борсук доказал (3), что при α-отображении φ пространства R^n в себя множество φR^n открыто в R^n и что его $(n-1)$-мерное число Бетти равно нулю. В настоящей работе я даю (не опирающееся на результаты Борсука) доказательство следующего предложения, значительно усиливающего теорему Борсука:

Теорема. *Пусть φ — непрерывное отображение n-мерного евклидова пространства R^n в себя, при котором прообразы всех точек $y \in \varphi R^n$ имеют диаметры меньшие, чем некоторое $\alpha > 0$. Тогда все группы Бетти открытого множества φR^n суть нуль-группы* (т. е. всякий цикл множества φR^n гомологичен в нем нулю).

2. Дадим пространству R^n определенную ориентацию, так что и всякий n-мерный симплекс T^n в R^n получает определенную ориентацию t^n. Для данной точки $y^0 \in \varphi R^n$ берем симплекс $T^n \supset \varphi^{-1}y^0$. Тогда коэффициент зацепления $\mathfrak{v}(\varphi\Delta t^n, y^0) = \gamma_{y^0}\varphi$ (ср. (2), стр. 568—577) не зависит от того, какой именно симплекс $T^n \supset \varphi^{-1}y^0$ был взят, и называется степенью отображения φ в точке y^0; легко видеть, что эта степень не зависит от выбора точки y^0.

Докажем основное равенство

$$\gamma = \gamma_{y^0}\varphi = \pm 1 \text{ для всех } y^0 \in \varphi R^n. \tag{1}$$

3. Для доказательства равенства (1) берем какую-нибудь точку $y_0 \in \varphi R^n$ и точку $x^0 \in \varphi^{-1}y_0$. Возьмем столь большой, содержащий точку x^0, симплекс T_0^n, чтобы было $\rho(x^0, \dot{T}_0^n) > \alpha$ (через $\dot{T}$ всегда обозначаем границу симплекса T); отсюда следует, что $\varphi^{-1}(\varphi x^0) \subset T_0^n$. Заключим T_0^n в еще больший симплекс T^n так, чтобы $\rho(\dot{T}^n, T_0^n) > \alpha$.

4. Пусть f достаточно хорошее (в смысле, который сейчас установим) симплициальное приближение отображения φ на замкнутом симплексе $\overline{T}^n$, а именно, симплициальное отображение некоторого подразделения K^n симплекса T^n в некоторое симплициальное подразделение X^n пространства R^n, причем выполнены условия:

1°. Отображение f есть α-отображение и φ переходит в f посредством такой деформации φ_θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = f$, что точка

$y_\theta = \varphi_\theta x^0$ находится на (равномерно) положительном расстоянии от $\varphi_\theta \dot{T}^n$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

2°. Для всех n-мерных симплексов $\tau^n \in K^n$ симплексы $f\tau^n$ имеют размерность n, и точка y_1 не принадлежит никакому симплексу размерности $< n$ комплекса fK^n. Кроме того предполагаем, что все лежащие на T_0^n симплексы комплекса K^n образуют подразделение K_0^n этого симплекса.

Из этих условий следует, что $\gamma = \gamma_{y_0}\varphi = \gamma_{y_1} f$ равно алгебраическому числу симплексов комплекса K^n, покрывающих при отображении f точку y_1.

5. Комплекс $Q^n = fK_0^n \subset X^n$ есть n-мерное ориентированное псевдомногообразие с краем, находящееся на положительном расстоянии от $f\dot{T}^n$. Поэтому, обозначая через x^n цепь, являющуюся ориентацией псевдомногообразия K^n, замечаем, что степень, с которой x^n покрывает при отображении f ориентированное псевдомногообразие Q^n, равна γ.

6. Возьмем пространство $R^{2n+1} \supset R^n$. По теореме Куратовского ([4]), существует такое топологическое отображение H полиэдра $f\overline{T}^n$ в R^{2n+1}, что $g = Hf$ есть α-сдвиг замкнутого симплекса $\overline{T}^n$; при этом, выбрав надлежащее подразделение K_1^n триангуляции K^n, можно предположить, что H есть симплициальное отображение триангуляции fK_1^n и g есть симплициальное отображение K_1^n в R^{2n+1}; наконец, предполагаем, что $g\overline{T}^n$ лежит в R^{2n+1} настолько близко к R^n, что проекция π пространства R^{2n+1} в R^n дает нам снова α-сдвиг $\pi g = \pi Hf$ симплекса $\overline{T}^n$. При этом, включив в отображение π, если надо, еще (достаточно малое) смещение, можно предположить, что комплекс πgK_1^n находится в общем положении относительно точки x^0. Отображение πH полиэдра $f\overline{T}^n$ обозначаем через h; очевидно, hf есть тот же α-сдвиг πg симплекса $\overline{T}^n$. Достаточно малый симплекс τ^n, содержащий внутри точку x^0, может при отображении $hf = \pi g$ покрываться лишь лежащими на T_0^n симплексами комплекса K_1^n. Значит, при отображении h симплекс τ^n может покрываться лишь лежащими на Q^n симплексами комплекса fK_1^n. Степень отображения h псевдомногообразия Q^n в точке x^0 обозначим через γ'. Тогда степень γ'' отображения $\pi g = hf$ (подразделенной) цепи x^n в точке x^0 равна $\gamma\gamma'$, и надо лишь доказать, что $\gamma'' = 1$. Для этого достаточно заметить, что посредством α-сдвига πg цикл Δx^n переходит в гомологичный ему в α-окрестности его тела цикл $\pi g \Delta x^n$, значит,

$$\gamma'' = \mathfrak{v}(\Delta \pi g x^n, x^0) = \mathfrak{v}(\pi g \Delta x^n, x^0) = \mathfrak{v}(\Delta x^n, x^0) = 1,$$

чем формула (1) доказана.

7. Следствия формулы (1). *Если $\Phi \subset \varphi R^n$ есть компакт, то $\varphi^{-1}\Phi$ ограничено и, значит, тоже есть компакт* ([3]).

Предположим противное. Тогда имеем в $\varphi^{-1}\Phi$ такую последовательность точек x_k, уходящих при $k \to \infty$ в бесконечность, что $y_k = \varphi x_k$ сходятся в некоторой точке $y \in \Phi$. Заключая множество $\varphi^{-1}y$ в симплекс T^n и применяя формулу (1), убеждаемся, что некоторая окрестность точки y покрыта при отображении φ симплексом T^n, в котором, следовательно, при любом достаточно большом k найдется точка $x_k' \in \varphi^{-1}y_k$. Но этого не может быть, так как при достаточно большом k имеем $\rho(x_k, x_k') > \alpha$. Из доказанного, кроме того, следует, что φR^n открыто в R^n ([3]).

8. Переходим к доказательству основного утверждения: *всякий цикл z^r в φR^n ограничивает в φR^n*. Так как φR^n есть, очевидно,

связное множество, то ограничиваемся случаем $r > 0$. Обозначим через $\bar{z}^r$ тело цикла z^r. По только что доказанному $\varphi^{-1}\bar{z}^r$ лежит внутри некоторого симплекса T^n. Апроксимируем отображение φ на $\bar{T}^n$ симплициальным отображением f некоторого симплициального разбиения K^n симплекса $\bar{T}^n$ в подразделение X^n пространства R^n так, чтобы выполнялись условия (x^n означает цепь, являющуюся подразделением в K^n ориентированного симплекса t^n):

1°. $f\bar{T}^n \subset \varphi R^n$.

2°. $\mathfrak{v}(f\Delta x^n, y^0) = \mathfrak{v}(\varphi\Delta x^n, y^0) = \pm 1$ для любой точки $y^0 \in \bar{z}^r$.

3°. Для всех $\tau^n \in K^n$ симплексы $f\tau^n$ суть n-мерные симплексы в общем положении с симплексами z^r.

Рассмотрим — в смысле, установленном мною в ([5]) * — пересечение сингулярной цепи (x^n, f) с циклом z^r. Это пересечение есть сингулярная цепь $(u^r, f) = (x^n, f) \times z^r$.

Докажем, что (u^r, f) есть сингулярный цикл. В самом деле, по формуле (4) работы ([5]) имеем

$$\Delta(u^r, f) = \Delta((x^n, f) \times z^r) = \pm\Delta(x^n, f) \times z^r = \pm(\Delta x^n, f) \times z^r = 0$$

(последнее равенство вытекает из того, что $f\overline{\Delta x^n} \cap \bar{z}^r$ пусто). Итак, u^r есть цикл в T^n. Поэтому $u^r = \Delta x^{r+1}$, где x^{r+1} — цепь в T^n, и, значит, $fu^r = f\Delta x^{r+1} = \Delta f x^{r+1}$. По формуле (1) работы ([5]) имеем $fu^r = f_1(u^r, f)$, а по формуле (5) той же работы

$$f_1(u^r, f) = f_1((x^n, f) \times z^r) = f_1(x^n, f) \times z^r = fx^n \times z^r.$$

Так как каждый симплекс комплекса X^n, содержащий точки z^r, покрывается при отображении f цепью x^n со степенью ± 1, то $fx^n \times z^r$ с точностью до подразделения совпадает с цепью $\pm z^r$, чем все доказано.

Поступило
10 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Александров, Ann. of Math., **30**, 101 (1928). [2] П. Александров, Комбинаторная топология, М. — Л., 1947. [3] K. Borsuk, Fund. math., **21**, 241 (1933). [4] K. Kuratowski, Ann. Soc. Polon. math., **17**, 118 (1938). [5] К. Ситников, ДАН, **66**, № 6 (1949).

* Исправляю мелкий недочет в этой работе: на стр. 1060, строки 17—18 снизу вместо слов: „Его граница $\dot{Q}$ есть наименьший носитель ...“ надо: „Его граница $\dot{Q}$ содержится в наименьшем носителе ...“.