Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 4

МАТЕМАТИКА

А. Г. СИГАЛОВ

К СУЩЕСТВОВАНИЮ АБСОЛЮТНОГО МИНИМУМА ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 28 I 1950)

В заметке автора (1) приводится критерий компактности семейства поверхностей и теорема существования абсолютного минимума двойных интегралов в параметрической форме. Здесь содержатся локальные теоремы существования. Обозначения, введенные в заметке (1), используются без ссылок.

1. Теорема 1. *Пусть D — открытая область и пусть функция $F(x, A)$: 1) определена и непрерывна при $x \in D$ и при произвольном A; 2) положительно однородна первой степени относительно A; 3) $F(x, A) > 0$, если $A \neq 0$, и 4) $F(x, A_1 + A_2) \leqslant F(x, A_1) + F(x, A_2)$ для любого $x \in D$ и любой пары векторов A_1, A_2.*

Пусть, далее, $\overline{D}_1$ — замкнутая ограниченная выпуклая область, $\overline{D}_1 \subset D$; Γ — простая жорданова кривая, лежащая в $\overline{D}_1$, и допустимые поверхности определяются тем, что они принадлежат классу L^2, ограничены кривой Γ и лежат в области $\overline{D}_1$.

Положим: $\mu_1 = \inf J(T)$ по всем допустимым поверхностям; $\mu_0(L^2) = \inf \underline{\lim}\, J(T_n)$, где $\{T_n\}$ — последовательность поверхностей класса L^2 таких, что расстояние каждой точки поверхности T_n до области $\overline{D}_1$ менее $1/n$ и граничные кривые Γ_n поверхностей T_n сходятся к кривой Γ; точная нижняя грань берется по всем таким последовательностям; $\mu_0(\mathfrak{P})$ определяется так же, как и $\mu_0(L^2)$, если заменить класс L^2 совокупностью полиэдров $\mathfrak{P}$.

Тогда, если существует по крайней мере одна допустимая поверхность, то существует допустимая поверхность T, для которой $J(T) = \mu_1 = \mu_0(L^2) = \mu_0(\mathfrak{P})$.

2. Теорема 2. *Пусть функция $F(x, A)$, допустимые поверхности и число μ_1 определены, как в теореме 1 (1).*

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее только от ε, что, если длина кривой Γ менее δ, то найдется допустимая поверхность T, для которой $J(T) = \mu_1$ и диаметр менее ε.

3. Теорема 3. *Пусть функция $F(x, A)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, $\boldsymbol{D_1}$ — ограниченная замкнутая область, $\overline{D}_1 \subset D$, ρ и ε — произвольные положительные числа, Γ — простая жорданова кривая, лежащая в D_1, расстояние каждой точки которой до границы области $\boldsymbol{D_1}$ больше ρ. Пусть допустимые поверхности и число μ_1 определены для кривой Γ в области $\overline{\boldsymbol{D}}_1$ так же, как и в теореме 1.*

Тогда найдется $\delta > 0$, зависящее только от ρ и ε, такое, что, если длина кривой Γ меньше δ, то существует допустимая по-

верхность T, для которой $J(T) = \mu_1$ и диаметр поверхности T менее ε.

4. Последовательность полиэдров $\{P_n\}$ назовем минимизирующей последовательностью (для теоремы 1), если граничные кривые Γ_n полиэдров P_n сходятся к кривой Γ, расстояние каждой точки полиэдра P_n до области $\overline{D_1}$ менее $1/n$ и $J(P_n) \to \mu_0(\mathfrak{P})$.

Покажем, как определяется минимизирующая последовательность полиэдров, удовлетворяющая условиям критерия компактности (¹).

Легко видеть, что каждая минимизирующая последовательность $\{P_n\}$ удовлетворяет условию 1) п. 7 (¹). Заменив полиэдры $P_n: f_n$ полиэдрами $P_n': g_n$, подобно тому, как описано в п. 8 (¹), получим минимизирующую последовательность полиэдров с невырождающимися гранями, удовлетворяющую условию 2) (¹).

5. Докажем, что условие 4) выполняется для последовательности $\{P_n'\}$. Пусть $g_n(u)$ — кусочно-линейное представление полиэдра P_n'. Если условие 4) не выполняется, то существует последовательность простых областей $\{G_n\}$ и число $\alpha > 0$ такие, что $l\{\overline{g}_n, G_n' - G_n' \cdot K'\} \to 0$, $\operatorname{Osc}\{\overline{g}_n, G_n' \cdot K'\} \to 0$, $n \to \infty$, $(\overline{g}_n, G_n) > \alpha > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $\{\overline{g}_n\}$ — подпоследовательность $\{g_n\}$. Пусть

$$M = \sup_{\|A\|=1,\ x \in D_2} F(x, A), \qquad m = \inf_{\|A\|=1,\ x \in D_2} F(x, A),$$

где D_2 — сумма всех δ-окрестностей точек $x \in D_1$ и δ выбран так, что замыкание области D_2 лежит в D. Если для всех n $G_n' K'$ не пусто, то, полагая $H_n = K - G_n$, имеем $(\overline{g}_n, K, F) - (\overline{g}_n, H_n, F) = (\overline{g}_n, G_n, F) \geqslant m\alpha$. Функция $\overline{g}_n$, рассматриваемая в односвязной области H_n, определяет полиэдр P_n^*, граничная кривая которого Γ_n', в силу $l\{\overline{g}_n, G_n' - G_n' \cdot K'\} \to 0$, $\operatorname{Osc}\{\overline{g}_n, G_n' K'\} \to 0$, стремится к Γ при $n \to \infty$. Получаем противоречие с предположением, что $\{P_n'\}$ — минимизирующая последовательность. Если последовательность $\{G_n\}$ содержит подпоследовательность областей, для которых $G_n' \cdot K'$ пусто, то, переопределяя функцию g_n над каждой такой областью, как описано в доказательстве леммы 1 (¹), снова приходим к противоречию с предположением, что $\{P_n'\}$ — минимизирующая последовательность.

6. Для построения минимизирующей последовательности полиэдров, удовлетворяющей условию 3) критерия компактности (¹), удобно следующим образом изменить понятие односвязной оболочки, данное в (¹):

Односвязной оболочкой $\widetilde{G}$ ограниченной области G назовем наименьшее множество, содержащее внутреннюю область каждого простого замкнутого полигона, лежащего в G. Все утверждения и доказательства заметки (¹) при новом определении односвязной оболочки остаются в силе.

Пусть $q > M/\pi m$. Область G назовем областью переопределения кусочно-линейной функции $f(u)$ индекса i_- (или i_+), если: а) G есть компонента множества $E(f^i < c)$ (соответственно, $E(f^i > c)$) при каком-либо значении c; б) все точки области G — внутренние точки квадрата K; в) $Q\{f, \widetilde{G}\} \geqslant q$ или $l\{f, \widetilde{G}'\} = 0$, $\operatorname{Osc}\{f, \widetilde{G}\} \neq 0$. Переопределением кусочно-линейной функции $f(u)$ над областью G индекса i_- (i_+) назовем построение функции $\overline{f}(u)$, совпадающей с $f(u)$ вне $\widetilde{G}$ и на границе $\widetilde{G}'$ и линейной в каждом треугольнике некоторой триангуляции области $\widetilde{G}$, не имеющей вершин внутри $\widetilde{G}$. Из $Q\{f, \widetilde{G}\} \geqslant q$ следует $(\overline{f}, K, F) \leqslant (f, K, F)$ для каждой кусочно-линейной функции $f(u)$, $f(K) \subset D_2$, так как имеет место неравенство $(\overline{f}, \widetilde{G}) \leqslant \frac{1}{\pi} l\{\overline{f}, \widetilde{G}'\}^2$.

7. Лемма 1. *Для фиксированного значения индекса i и кусочно-линейной функции $f(u)$, $u \in K$, существует конечная система областей переопределения $G_1, \ldots, G_n$ функции $f(u)$ индексов i_- и i_+ такая, что:* а) *области $\widetilde{G}_1, \ldots, \widetilde{G}_n$ попарно не пересекаются;* б) *функция $\bar{f}(u)$, полученная в результате переопределения функции $f(u)$ над областями $G_1, \ldots, G_n$, не имеет областей переопределения индексов i_- и i_+;* в) *если G — произвольная область переопределения функции $f(u)$ индекса i_- или i_+, то $\widetilde{G}$ содержится в некоторой области $\widetilde{G}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Переопределение функции $f(u)$ над областями $G_1, \ldots, G_n$ леммы 1 назовем полным переопределением функции $f(u)$ индекса i, $i = 1, 2, 3$.

8. Если для кусочно-линейной функции $f(u)$, $u \in K$, последовательно провести полные переопределения индексов 1, 2, 3, то функция $\bar{f}(u)$, полученная в результате, может иметь области переопределения индексов 1 и 2. Однако справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти такую конечную последовательность полных переопределений функции $f(u)$, что для функции $\bar{f}(u)$, полученной в результате, имеет место: для каждой области переопределения G функции $\bar{f}(u)$ индекса i_- или i_+, $i = 1, 2, 3$, выполняется $\lambda^i\{\bar{f}, G\} < \varepsilon$.*

9. Для каждого полиэдра $P_n : f_n(u)$ некоторой минимизирующей последовательности проводим конечное число переопределений так, чтобы для полученной функции g_n из $Q\{g_n, G\} \geqslant q$ следовало $\lambda\{f_n, G\} < \varepsilon_n \to 0$ для любой основной области G. Если $P'_n : g_n(u)$, то $J(P'_n) \leqslant J(P_n)$ для всех n, начиная с некоторого. Следовательно, $\{P'_n\}$ — минимизирующая последовательность. Она удовлетворяет условию 3) критерия компактности ([1]).

10. Пусть T — предельная поверхность для минимизирующей последовательности $\{P'_n\}$. Для теоремы 1 T есть допустимая поверхность. Из полунепрерывности снизу функционала $J(T)$ следует, что $J(T) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} J(P'_n) = \mu_0(\mathfrak{P})$. С другой стороны, известно, что для любого $\varepsilon > 0$ и поверхности $T \in L^2$ можно найти полиэдр P такой, что $r(T, P) < \varepsilon$ и $|J(T) - J(P)| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\mu_0(P) = \mu_0(L^2)$. Но, очевидно, $\mu_0(L^2) \leqslant J(T)$; следовательно, $J(T) = \mu_0(\mathfrak{P}) = \mu_0(L^2) = \mu_1$.

11. Для доказательства теорем 2 и 3 достаточно заметить, что найдется такое $\delta > 0$, зависящее в случае теоремы 2 только от ε, а в случае теоремы 3 также и от ρ, что, если длина кривой Γ менее δ, то площади полиэдра минимизирующей последовательности, начиная с некоторого номера, окажутся менее ε. Проводя переопределение над некоторыми основными областями по лемме 1 и применяя к новой минимизирующей последовательности оценку леммы 3 ([1]), получим утверждения теорем 2 и 3.

12. Продолжим функционал $J(T)$, определенный для поверхностей класса L^2, как интеграл (f, K, F), на совокупность L всех поверхностей конечной лебеговой площади так, чтобы сохранилось свойство полунепрерывности снизу, а именно, $J(T) = \inf \underline{\lim}\, J(T_n)$, где $T \in L$, $T_n \in L^2$, $r(T_n, T) \to 0$, $n \to \infty$, и точная нижняя грань берется по всем таким последовательностям $\{T_n\}$. Поверхность T_0, дающая абсолютный минимум в классе L^2 интегралу $J(T)$, дает абсолютный минимум в классе L продолженному функционалу.

13. Чезари определил интеграл вариационного исчисления для произвольной непрерывной поверхности конечной площади ([2]). Покажем, что продолжение функционала $J(T)$, определенное в п. 8, совпадает с интегралом Чезари. Обозначая интеграл Чезари через $J_C(T)$, заметим, что, так как при $T \in L^2$ $J_C(T) = J(T)$ и в силу полунепре-

рывности снизу функционала $J_C(T)$ ([3]) получим $J(T) \geqslant J_C(T)$ для любой поверхности $T \in L$. С другой стороны, если $T_n \in L^2$, $r(T_n, T) \to 0$, $A(T_n) \to A(T)$, то $J_C(T_n) \to J_C(T)$, а следовательно, $J(T_n) \to J_C(T)$. Отсюда следует, что $J(T) \leqslant J_C(T)$. Итак, $J(T) = J_C(T)$ для любой поверхности $T \in L$, ч. и т. д.

Таким образом, если функция $F(x, A)$ удовлетворяет условию квазирегулярности, выполнение которого предполагается в теоремах Чезари о полунепрерывности функционала $J_C(T)$ ([3]), то поверхность T, существование которой утверждается в теореме 1 ([1]) и в теоремах 1, 2, 3 настоящей заметки, дает абсолютный минимум также в классе L.

Поступило
25 XI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Сигалов, ДАН, 70, № 5 (1950). [2] Lamberto Cesari, Ann. R. Sc. N. Pisa, 13, 78 (1948). [3] Lamberto Cesari, ibid., 14, 47 (1948).