Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 4

МАТЕМАТИКА

В. М. ОЛОВЯНИШНИКОВ

ОЦЕНКА ОСТАТКА ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА, ПОЛИНОМАМИ, НАИЛУЧШИМИ В ЗАДАННОЙ СИСТЕМЕ ТОЧЕК

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 I 1950)

1. Мы рассматриваем приближение функций (непериодических, на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant +1$), принадлежащих к классу KH функций, удовлетворяющих условию Липшица с константой K, в двух случаях:

1) приближающий функцию f полином обыкновенный $(n-1)$-й степени $P_n(f, x)$, наилучший в системе точек $x_k = \cos(k\pi/n)$;

2) приближающий четную функцию f полином обыкновенный $2(n-1)$-й степени $P_{2n}(f, x)$, наилучший в системе точек $x_k = \sin(k\pi/2n)$, причем класс четных функций, удовлетворяющих условию Липшица, обозначен через $K\check{H}$.

Нами получено асимптотическое выражение (оценка), во-первых, верхней грани $\mathscr{E}_{P_n}(KH, x)$ абсолютных величин уклонений функции от полинома P_n, распространенной на класс KH, и, во-вторых, верхней грани $\mathscr{E}_{P_{2n}}(K\check{H}, x)$ абсолютных величин уклонений функции от полинома P_{2n}, распространенной на класс $K\check{H}$.

Результаты даются следующими теоремами.

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$\mathscr{E}_{P_n}(KH, x) = \frac{2K}{\pi} \sin\frac{\pi}{2n} \left| \sqrt{1-x^2} \sin n \arccos x \right| \lg n + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{1}$$

причем

$$\mathscr{E}_{P_n}\left(KH, \cos\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{K}{n}.$$

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$\mathscr{E}_{P_{2n}}(K\check{H}, x) = \frac{2K}{\pi} \sin\frac{\pi}{4n} \left| \sqrt{1-x^2} \sin 2n \arcsin x \right| \left| \lg(n|x|) \right| + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{2}$$

причем

$$\mathscr{E}_{P_{2n}}\left(K\check{H}, \sin\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{K}{2n}.$$

2. При доказательстве этих теорем нам понадобится приближающий непрерывную периода 2π четную функцию f четный порядка $n-1$ тригонометрический полином $\check{T}_n(f, x)$, наилучший в системе точек $x_k = k\pi/n$. Он выражается формулой

$$\check{T}_n(f, x) = \frac{1}{2n}\left[Q_n(x) f(0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} Q_n(x-x_k) f(x_k) + Q_n(x-\pi) f(\pi) \right], \tag{3}$$

где $Q_n(x-x_k) = G_n(x-x_k) + G_n(x+x_k)$, а $G_n(u) = \dfrac{\sin\frac{2n-1}{2}u}{2\sin{}^1/_2\, u}$.

Заметим еще, что в случае нечетности приближаемой функции имеем

$$\tilde{T}_n(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} R_n(x - x_k) f(x_k), \tag{4}$$

где $R_n(x - x_k) = G_n(x - x_k) - G_n(x + x_k)$.

Рассматривая (3) и (4) как линейные функционалы и оценивая их нормы

$$\check{N}_n(x) = \frac{1}{2n} \left[|Q_n(x)| + 2 \sum_{k=1}^{n-1} |Q_n(x - x_k)| + |Q_n(x - \pi)| \right], \tag{5}$$

$$\tilde{N}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} |R_n(x - x_k)|, \tag{6}$$

получим

$$\check{N}_n(x) = \frac{2}{\pi} |\sin nx| \, |\lg(n |\sin x|)| + O(1), \tag{7}$$

$$\tilde{N}_n(x) = \frac{2}{\pi} |\sin nx| \lg n + O(1) \; *. \tag{8}$$

3. Для доказательства теоремы 1 совершим подстановку $x = \cos z$ и вместо оценки $\mathscr{E}_{P_n}(H, x)$ будем находить оценку $\mathscr{E}_{\check{T}_n}(H_c, z)$, где $\check{T}_n$ — полином (3), а H_c — класс четных функций F периода 2π, удовлетворяющих для любых z' и z'' условию

$$|F(z'') - F(z')| \leqslant |\cos z'' - \cos z'|.$$

Четная функция φ, определяемая на полупериоде равенствами

$$\varphi(t) = (-1)^k (\cos kh - \cos t - \sin kh \operatorname{tg}(h/2))$$
$$(h = \pi/n, \; kh \leqslant t \leqslant (k+1)h, \; k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{9}$$

принадлежит к классу H_c и, так как

$$\varphi(z_{k-1}) - \varphi(z_k) = (-1)^k (\cos(k-1)h - \cos kh),$$

то

$$\mathscr{E}_{\check{T}_n}\left(H_c, \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Оценка $\mathscr{E}_{\check{T}_n}(H_c, z)$ сводится к оценке $\sup\limits_{F \in H'_c} |\check{T}_n(F, z)|$, где H'_c — подкласс функций F из H_c, обращающихся в нуль при данном значении z.

Положим $z = mh + z'$ $(0 < z' < h)$ и представим $Q_n(z - z_k)$ в следующем виде:

$$Q_n(z - z_k) = (-1)^{k-m} [\sin nz' \cdot t(k) - \cos nz'], \quad t(k) = \frac{\sin z}{\cos(k\pi/n) - \cos z}.$$

Определим l неравенствами

$$\sin nz' \, t(l) - \cos nz' \leqslant 0, \quad \sin nz' \cdot t(l+1) - \cos nz' > 0.$$

* Подробное доказательство этих равенств, а также результатов, изложенных в (1), можно найти в работе (2).

Здесь возможны три случая:

1) $0 < nz' < z/2$, тогда $0 < l < m$;

2) $z/2 \leqslant nz' \leqslant (z+\pi)/2$, l отсутствует;

3) $(z+\pi)/2 < nz' < \pi$, тогда $m+1 < l < n$.

Для определенности будем считать $0 < l < m$. Легко видеть, что

$$\operatorname{sign} Q_n(z-z_k) = (-1)^{k-m-1} \quad (k=0, 1, \ldots, l),$$
$$\operatorname{sign} Q_n(z-z_k) = (-1)^{k-m} \quad (k=l+1, \ldots, m),$$
$$\operatorname{sign} Q_n(z-z_k) = (-1)^{k-m+1} \quad (k=m+1, \ldots, n).$$

Далее, для $F \in H_c'$ имеем

$$|\check{T}_n(F, x)| \leqslant \frac{1}{2n}\Bigg[2\sum_{1}^{l}|q_k|(\cos(k-1)h - \cos kh) +$$
$$+ 2\sum_{l+1}^{m}|q_k|(\cos kh - \cos(k+1)h) + \sum_{m+1}^{n-1}|q_k|(\cos(k-1)h - \cos kh) +$$
$$+ \sum_{m+1}^{n}|q_k'|(\cos(k-1)h - \cos kh)\Bigg] + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{10}$$

где

$$q_k = \sum_{\nu=k}^{l} Q_n(z-z_k) \quad (k=0, 1, \ldots, l);$$

$$q_k = \sum_{\nu=l+1}^{k} Q_n(z-z_k) \quad (k=l+1, \ldots, m),$$

$$q_k = \sum_{\nu=k}^{n-1} Q_n(z-z_k) \quad (k=m+1, \ldots, n-1);$$

$$q_k' = \sum_{\nu=k}^{n} Q_n(z-z_k) \quad (k=m+1, \ldots, n),$$

причем

$$\operatorname{sign} q_k = \operatorname{sign} Q_n(z-z_k), \quad \operatorname{sign} q_k' = \operatorname{sign} Q_n(z-z_k).$$

Определим функцию $\varphi_z(t)$ из H_c' на полупериоде, приняв за основу функцию (9), полагая для $kh \leqslant t \leqslant (k+1)h$:

$$\varphi_z(t) = \varphi(t) \quad (k=0, 1, \ldots, l-1); \ \varphi_z(t) = (-1)^{l-1}\sin lh \cdot \operatorname{tg}(h/2) \quad (k=l)$$
$$(-1)^m \varphi_z(t) = -\varphi(t) \quad (k=l+1, \ldots, m-2);$$
$$\varphi_z(t) = (-1)^m\left[\frac{(\cos(m-1)h - \cos t)\sin(m-1)h}{\sin(m-1)h + \sin mh} - \right.$$
$$\left. - \sin(m-1)h \cdot \operatorname{tg}\frac{h}{2}\right] \quad (k=m-1);$$
$$\varphi_z(t) = 0 \quad (k=m);$$
$$\varphi_z(t) = (-1)^{m-1}\frac{(\cos(m+1)h - \cos t)\sin(m+2)h}{\sin(m+1)h + \sin(m+2)h} \quad (k=m+1);$$
$$\varphi_z(t) = \varphi(t) \quad (k=m+2, \ldots, n-1).$$

Очевидно, выражение $|\check{T}_n(\varphi_z, z)|$ равно правой части (10). Преобразуя ее, мы имеем

$$\mathcal{E}_{\check{T}_n}(H_c, z) = \frac{1}{n}\sin\frac{h}{2}\left(2\sum_{1}^{m}|q_k|\sin kh + \sum_{m+1}^{n-1}|q_k|\sin kh + \sum_{m+1}^{n-1}|q_k'|\sin kh\right) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

и, следовательно,

$$\mathscr{E}_{\check{T}_n}(H_c, z) = \frac{1}{n}\sin\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n-1}|Q_n(z-z_k)|\sin kh + O\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (11)$$

Замечая, что $|Q_n(z-z_k)| = \left|\frac{\sin nz\cdot\sin z}{\cos kh-\cos z}\right| + O(1)$, и имея в виду, что

$$\left|\frac{\sin nz}{\cos kh-\cos z}\right|\sin kh = |R_n(z-z_k)|,$$

на основании (6) и (8) можно написать

$$\mathscr{E}_{\check{T}_n}(H_c, z) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}|\sin z\cdot\sin nz|\lg n + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Возвращаясь к переменному x и, следовательно, к классу H функций f и умножив результат на K, мы получим (1).

4. Чтобы доказать теорему 2, мы сделаем подстановку $x=\sin(z/2)$ и оценку $\mathscr{E}_{P_{2n}}(\check{H}, x)$ сведем к оценке $\mathscr{E}_{\check{T}_n}(H_s, z)$, где H_s — класс четных функций периода 2π, удовлетворяющих условию

$$|F(z'')-F(z')| \leqslant \left|\sin\frac{z''}{2}-\sin\frac{z'}{2}\right|.$$

Отправляясь от четной функции $\Psi(t)$, на полупериоде определяемой равенствами

$$\Psi(t) = (-1)^k\left(\sin\frac{kh}{2}-\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{kh}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{h}{4}\right)$$

$$(h=\pi/n,\ kh\leqslant t\leqslant(k+1)h,\quad k=0, 1, \ldots, n-1), \qquad (12)$$

мы найдем, что

$$\mathscr{E}_{\check{T}_n}\left(H_s, \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2n}.$$

Далее будем оценивать $\sup\limits_{F\in H_s'}|\check{T}_n(F, z)|$, где H_s' — соответствующий подкласс функций F из H_s.

Так же, как была установлена справедливость равенства (11), можно доказать, что

$$\mathscr{E}_{\check{T}_n}(H_s, z) = \frac{1}{n}\sin\frac{h}{4}\sum_{k=1}^{n}|Q_n(z-z_k)|\cos\frac{kh}{2}, \qquad (13)$$

причем экстремальная функция строится аналогичным образом на основе функции (12).

Оценивая правую часть (13) примерно тем же способом, каким из (5) получается (7), мы получим

$$\mathscr{E}_{\check{T}_n}(H_s, z) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{4n}\left|\cos\frac{z}{2}\cdot\sin nz\right|\left|\lg\left(n\left|\sin\frac{z}{2}\right|\right)\right| + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Возвращаясь к x, имеем (2).

Поступило
29 XI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Оловянишников, ДАН, 70, № 5 (1950). [2] В. М. Оловянишников, Оценка остатка при приближении функций полиномами, наилучшими в заданной системе точек, Диссертация, Моск. пед. ин-т им. Потемкина, 1946.