Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. МЕЙМАН

ОБ УСЛОВИЯХ, ПРИ КОТОРЫХ ПРОИЗВОДНАЯ МАЖОРАНТЫ ФУНКЦИИ ЯВЛЯЕТСЯ МАЖОРАНТОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 9 II 1950)

1°. В начале настоящей заметки решается общий вопрос теории функций вещественного переменного об условиях, при которых из неравенства $|f(x)|\leqslant|\omega(x)|$ в окрестности точки x следует неравенство $|f'(x)|\leqslant|\omega'(x)|$.

Полученное решение позволяет, пользуясь ставшими уже классическими свойствами целых функций, получить неравенства для производных целых функций. При этом основную роль играет важный класс целых функций, названный мною в ряде работ HB ([1-4]). Хорошо известно неравенство С. Н. Бернштейна

$$|f'(x)|\leqslant\sigma\sup_{-\infty<x<+\infty}|f(x)|, \tag{1}$$

доказанное сперва для тригонометрических полиномов, а затем и для целых функций первого порядка среднего типа σ (т. е. для функций конечной степени σ) ([5,6]). Неравенство существенно обобщено в тех же работах самим С. Н. Бернштейном и в позднейших работах Н. И. Ахиезера ([10]) и Б. Я. Левина. Однако все эти результаты не выходят за пределы целых функций конечной степени (экспоненциального типа). Неравенства, полученные ниже, справедливы для функций произвольного, даже бесконечного порядка и содержат, в частности, неравенство С. Н. Бернштейна и его обобщения вплоть до последних результатов Б. Я. Левина ([7]).

2°. Пусть $f(x)$ и $\omega(x)$ — две комплекснозначные функции вещественного переменного. Будем говорить, что они удовлетворяют в точке x условиям (A) и (B), если в этой точке:

A. $|f(x)|\leqslant|\omega(x)|$.

B. При любом фиксированном вещественном φ аргумент функции $F_\varphi(x)=e^{i\varphi}\omega(x)-f(x)$ не убывает в некоторой окрестности точки x, возможно, зависящей от φ.

Теорема 1. *Если функции $f(x)$ и $\omega(x)$ удовлетворяют на интервале $a\leqslant x\leqslant b$ условиям* (A) *и* (B), *то $\theta(x)=\arg\omega(x)$ на любом промежутке, где $f(x)/\omega(x)$ не сводится к константе, строго возрастает и*

$$|\psi(x_2)-\psi(x_1)|\leqslant 2\sin\frac{\theta(x_2)-\theta(x_1)}{2}, \qquad \psi(x)=\frac{f(x)}{|\omega(x)|}, \tag{2}$$

если только $\theta(x_2)-\theta(x_1)\leqslant\pi$, $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$.

Доказательство. Выберем параметр φ так, что $\arg(\psi(x_2)-\psi(x_1))-\arg\dfrac{F_\varphi(x_1)}{|\omega(x_1)|}=\dfrac{\pi}{2}$, тогда $\arg(\psi(x_2)-\psi(x_1))-\arg\dfrac{F_\varphi(x_2)}{|\omega(x_2)|}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, откуда следует (см. рис. 1), что $|\psi(x_2)-\psi(x_1)|\leqslant|e^{i\varphi+i\theta(x_1)}-e^{i\varphi+i\theta(x_2)}|\cdot$

Введем обозначения:

$$\psi(x)=\frac{f(x)}{|\omega(x)|},\quad \cos\alpha=\frac{|f(x)|}{|\omega(x)|},\quad 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2};$$

$$\beta=\arg\frac{\omega'(x)}{\omega(x)}=\arg\left[\frac{|\omega(x)|'}{|\omega(x)|}+i\frac{d\theta}{dx}\right], \tag{3}$$

$$\cos\beta=\frac{|\omega(x)|'}{|\omega'(x)|},\quad \sin\beta=\frac{|\omega(x)|}{|\omega'(x)|}\frac{d\theta}{dx},\quad 0\leqslant\beta\leqslant\pi;\quad \gamma=\arg f'(x)-\arg f(x).$$

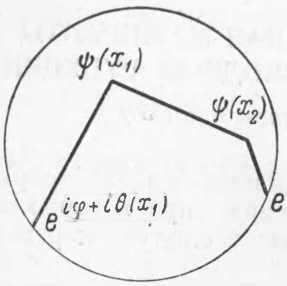

Рис. 1

Теорема 2. *Если функции $f(x)$ и $\omega(x)$ удовлетворяют условиям* (A) *и* (B), *то в точках, в которых они имеют производные, последние удовлетворяют неравенству*

$$|f'(x)|\leqslant|\omega'(x)|. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $x_1<x_2$ и $0\leqslant\arg F_\varphi(x_2)-\arg F_\varphi(x_1)\leqslant\pi$. Выберем φ так, что $\arg[f(x_2)-f(x_1)]-\arg F_\varphi(x_1)=\pi/2$, тогда $|\arg[f(x_2)-f(x_1)]-\arg[F_\varphi(x_2)-F_\varphi(x_1)]|\leqslant\pi/2$,

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant|[f(x_2)-f(x_1)]+[F_\varphi(x_2)-F_\varphi(x_1)]|=|\omega(x_2)-\omega(x_1)|, \tag{5}$$

откуда следует (4). Неравенство (4) можно уточнить. Пусть $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$. Условие (B) равносильно неравенству

$$[|\omega|\sin(\varphi+\theta)-f_2]'[|\omega|\cos(\varphi+\theta)-f_1]-$$
$$-[|\omega|\cos(\varphi+\theta)-f_1]'[|\omega|\sin(\varphi+\theta)-f_2]\geqslant 0. \tag{6}$$

Из тождеств: $f_1\sin(\varphi+\theta)-f_2\cos(\varphi+\theta)=\operatorname{Re}(if)\,e^{-i(\varphi+\theta)}$, $f_1\cos(\varphi+\theta)+f_2\sin(\varphi+\theta)=\operatorname{Re}fe^{-i(\varphi+\theta)}$, $f_2'\cos(\varphi+\theta)-f_1'\sin(\varphi+\theta)=\operatorname{Re}(-if')\,e^{-i(\varphi+\theta)}$, $f_2'f_1-f_1'f_2=|f|\cdot|f'|\sin\gamma$ следует, что неравенство (6) можно записать в виде

$$\left|f'-\left(\overline{\frac{\omega'}{\omega}}\right)f\right|\leqslant|\omega|\frac{d\theta}{dx}+|f'|\frac{|f|}{|\omega|}\sin\gamma=|\omega'|\sin\beta+|f'|\cos\alpha\sin\gamma, \tag{7}$$

$$|f'|^2\sin^2\alpha+[\,|f'|\cos\alpha\cos\gamma-|\omega'|\cos\beta]^2\leqslant|\omega'|^2\sin^2\alpha. \tag{8}$$

Теорема 3. *Если функции $f(x)$ и $\omega(x)$ удовлетворяют в точке x условиям* (A) *и* (B), *имеют производные в этой точке и $f'(x)/f(x)$ вещественно, то*

$$|f'|\leqslant|\omega'|\cos(\beta-\alpha)\quad \textit{или}\quad |f'|\leqslant-|\omega'|\cos(\beta+\alpha), \tag{9}$$

в зависимости от положительности или отрицательности отношения $f'(x)/f(x)$.

Доказательство. В этом случае $\sin\gamma=0$ и неравенство (8) можно привести к виду

$$\big||f'|-\varepsilon|\omega'|\cos\alpha\cos\beta\big|\leqslant|\omega'|\sin\beta\sin\alpha,\quad \varepsilon=\cos\gamma=\pm1. \tag{10}$$

Примечание 1. Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x вещественна, то выкладка в доказательстве теоремы 2 весьма упрощается, и упрощенное неравенство (6) сразу приводимо к (11) или к

$$\left(\frac{d}{d\theta}\psi(x)\right)^2+\psi^2(x)\leqslant 1,\quad \frac{|d\psi|}{\sqrt{1-\psi^2}}\leqslant d\theta. \tag{11}$$

Если модуль мажоранты — константа, то $\beta=\pi/2$, и (10) сводится к

$$|f'(x)|\leqslant\sqrt{1-\frac{f^2(x)}{|\omega|^2}}\,|\omega'(x)|. \tag{12}$$

Теорема 4. *Если $f(x)$ вещественна на интервале $[a, b]$, на котором выполняются условия* (A) *и* (B), *то*

$$|\psi(x_2)-\psi(x_1)|\leqslant\sin[\theta(x_2)-\theta(x_1)]=2\cos\frac{\theta(x_2)-\theta(x_1)}{2}\sin\frac{\theta(x_2)-\theta(x_1)}{2},$$

если только $\theta(x_2)-\theta(x_1)\leqslant\pi/2$, $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$.

Доказывается непосредственным интегрированием второго неравенства (11). Следует из вывода соответствующих неравенств.

Теорема 5. *Если в точке* x $|f(x)|\leqslant|\omega(x)|$ *и выполняется неравенство* (8), *а в случае вещественности* $f'(x)/f(x)$ *соответствующее неравенство* (9), *то выполняется условие* (B).

3°. Целую функцию $F(z)$ будем записывать в виде $F(z)=g(z)+ih(z)$, где $g(z)$ и $h(z)$ — целые вещественные функции. Под $\overline{F}(z)$ понимается $g(z)-ih(z)$.

Определение. Целая функция $F(z)$ называется функцией класса HB, если $F(z)$ и $\overline{F}(z)$ не имеют общих нулей и $|\overline{F}(z)|<|F(z)|$ при $\operatorname{Im} z<0$.

Если $F(z)\in HB$, то $F(z)$ не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Im} z\leqslant 0$, $h'(x)g(x)-g'(x)h(x)>0$, и при любых вещественных коэффициентах λ и μ линейная комбинация $\lambda g(z)+\mu h(z)$ имеет только простые вещественные корни. Если последовательность $F_n(z)\in HB$ и $F_n(z)$ равномерно стремится к функции $F(z)$, то либо $F(z)\in HB$, либо $F(z)=u(z)F_1(z)$, где $u(z)$ — некоторая целая вещественная функция, все нули которой вещественны, а $F_1(z)\in HB$ или константа [1-4]. В [1] и [4] (см., например, [4], теорему IV. 15 и (10.6)) доказана

Теорема 6. *Необходимые и достаточные условия принадлежности функции $F(z)=g(z)+ih(z)$ классу HB состоят в следующем: 1) все нули функций $g(z)$ и $h(z)$ вещественны, просты и перемежаются друг с другом; 2)* $\lim\limits_{|z|\to\infty}\dfrac{\log|g(z)/h(z)|}{|z|}=0$ *по крайней мере вдоль одного луча в верхней полуплоскости, отличного от лучей* $\cos\nu\varphi=0$, *где ν — некоторое целое число* $1\leqslant\nu\leqslant[\rho]$, *а ρ — порядок функции* $F(z)$, $z=re^{i\varphi}$; *3) хотя бы в одной точке* $h'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)h(x_0)>0$ *.

Из результатов § 12 главы VI работы [4] следует:

Теорема 7. *Пусть $f(z)$ и $\omega(z)$ — целые функции, $\omega(z)$ не имеет нулей в полуплоскости* $\operatorname{Im} z\leqslant 0$ *и вдоль вещественной оси* $|f(x)|\leqslant\omega(x)$. *Если нуль не служит асимптотическим значением функции* $\omega(z)/f(z)$ *вдоль пути, лежащего в нижней полуплоскости, то при всех* $|w|<1$ *функция* $F_w(z)=\omega(z)-wf(z)$ *не имеет нулей в нижней полуплоскости и* $|f(z)/\omega(z)|<1$ *при* $\operatorname{Im} z<0$.

---

* Если отбросить предположение конечности порядка функции $F(z)$, то условие 2) заменяется условием (10.3) в теореме IV. 15 [4] или условием (6) в [1]. Функции класса HB первого порядка среднего типа (т. е. конечной степени) с точностью до вырождения совпадают с функциями класса P, определенного Б. Я. Левиным [7]. В указанном случае теорема 6 в несколько иных терминах независимо от меня была доказана Б. Я. Левиным [8] и М. Г. Крейном [7].

Теорема 8. *Пусть* $f(z)$ *и* $\omega(z)$ — *целые функции,* $\omega(z) \in HB$, $|f(x)| \leqslant |\omega(x)|$ *и нуль не служит асимптотическим значением ни одной из функций* $\omega(z)/f(z)$ *и* $\omega(z)/\overline{f}(z)$ *в нижней полуплоскости; тогда*

$$\left|\frac{f(z)}{\omega(z)}\right| < 1, \quad \left|\frac{\overline{f}(z)}{\omega(z)}\right| < 1, \quad \operatorname{Im} z < 0 \tag{13}$$

и при всех $|w| < 1$ *функция* $F_w(z) = \omega(z) - wf(z) \in HB$.

Доказательство. Из теоремы 7 следуют неравенства (13) и что $F_w(z) \neq 0$ при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$. Числитель отношения

$$\left|\frac{F_w(\overline{z})}{F_w(z)}\right| = \left|\frac{\overline{F}_w(z)}{F_w(z)}\right| = \frac{\left|\frac{\overline{\omega}(z)}{\omega(z)}\right| - \overline{w}\frac{\overline{f}(z)}{\omega(z)}\Big|}{\left|1 - w\frac{f(z)}{\omega(z)}\right|}$$

ограничен при $\operatorname{Im} z < 0$, а знаменатель по модулю больше $1 - |w|$, следовательно, $F_w(z) \in HB$.

Теорема 9. *Если функции* $f(z)$ *и* $\omega(z)$ *удовлетворяют условиям теоремы 8, то они удовлетворяют условиям* (A) *и* (B) *и всем соответствующим неравенствам* (2—12).

Доказательство. Согласно теореме 8, при любых фиксированных $t > 1$ и φ функция $te^{i\varphi}\omega(z) - f(z) \in HB$, следовательно, в любой точке x вещественной оси ее аргумент возрастает; заставляя $t \to 1$, найдем, что аргумент предельной функции $e^{i\varphi}\omega(z) - f(z)$ не убывает.

В случае, когда функции $f(z)$ и $\omega(z)$ первого порядка среднего типа τ и σ и $\omega(z) \in HB$, из неравенств $|f(x)| \leqslant |\omega(x)|$ и $\tau \leqslant \sigma$ следует, что $f(z)$ и $\omega(z)$ удовлетворяют условиям теоремы 8. Это вытекает из того, что индикатриса роста $h(\varphi)$ регулярной в нижней полуплоскости функции $f(re^{i\varphi})/\omega(re^{i\varphi})$ вследствие ее ограниченности на вещественной оси имеет вид $A \sin\varphi$ $(-\pi \leqslant \varphi \leqslant 0)$ (см., например, ([4]), стр. 115). По теореме III работы М. Картрайт ([9]), такие функции обладают тем свойством, что при любых $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $\zeta > 0$, $\delta > 0$

$$\log|f(re^{i\varphi})| - \log|\omega(re^{i\varphi})| > [h(\varphi) - \varepsilon]\, r$$

при $\eta R < r < R$ в углу $-\pi + \delta \leqslant \varphi \leqslant -\delta$, $R > R_0$, вне кружков с общей суммой радиусов меньшей ζR. Отсюда следует, что индикатриса роста произведений такой функции на любую другую равна сумме индикатрис.

Неравенство (1) С. Н. Бернштейна получается, если положить $\omega(z) = \sup|f(x)|\, Re^{i\sigma z}$, $-\infty < x < +\infty$.

Теорема 10. *Пусть* $f(z)$ *и* $\omega(z)$ *удовлетворяют условиям теоремы 8. Если хотя бы в одной вещественной точке* x_0 *в одном из соответствующих неравенств* (2—12) *имеет место знак равенства и в этой точке* $|f(x_0)| < |\omega(x_0)|$, *то*

$$f(z) = c_1\omega(z) + c_2\overline{\omega}(z),$$

где c_1 *и* c_2 — *константы и* $|c_1| + |c_2| = 1$. *Если* $f(z)$ — *вещественная функция, то существует такое* φ, *что* $f(z) = \operatorname{Re}[e^{i\varphi}\omega(z)]$. *Обратно, если* $f(z)$ *имеет указанный вид, то по крайней мере в одной точке в каждом из неравенств* (4—12) *имеет место знак равенства.*

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступило
15 I 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Мейман, ДАН, 40, № 2 (1943). [2] Н. Мейман, ДАН, 40, № 5 (1943). [3] Н. Мейман, ДАН, 62, № 3 (1948). [4] Н. Г. Чеботарев — Н. Н. Мейман. Тр. Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 26 (1949). [5] С. Н. Бернштейн, Leçons sur les propriétés extrémales..., Paris, 1926. [6] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, М., 1937. [7] Б. Я. Левин, ДАН, 65, № 5 (1949). [8] Б. Я. Левин, ДАН, 41, №№ 2 и 3 (1943). [9] M. L. Cartwright, Proc. Lond. Math. Soc., 38, part 2, 158; 3, 161 (1934). [10] Н. И. Ахиезер, Изв. АН СССР, сер. матем., 10, № 5 (1946). [11] М. Г. Крейн, Уч. зап. Куйбышевск. пед. ин-та, в. 7 (1943).