Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 4

МАТЕМАТИКА

Б. М. ЛЕВИТАН

К ТЕОРЕМЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 I 1950)

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}\, y = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant \infty), \tag{1}$$

где λ — действительное число и $q(x)$ — действительная, непрерывная в каждом конечном интервале функция.

Пусть $\varphi(x, \lambda)$ есть решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(0, \lambda) = \sin\alpha, \quad \varphi'_x(0, \lambda) = -\cos\alpha, \tag{2}$$

где α — действительное число.

Имеет место следующая основная теорема ([1-3]):

Пусть $f(x) \subset L_2(0, \infty)$. Существуют, по крайней мере, одна, не зависящая от функции $f(x)$, монотонно-возрастающая, ограниченная в каждом конечном интервале функция $\rho(\lambda)$ и зависящая от функции $f(x)$ функция $F(\lambda)$ (обобщенное преобразование Фурье функции $f(x)$) так, что справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty f^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)\, d\rho(\lambda); \tag{3}$$

$F(\lambda)$ есть предел в среднем квадратичном функций

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f(x)\, \varphi(x, \lambda)\, dx \quad (n > 0),$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{F(\lambda - F_n(\lambda)\}^2\, d\rho(\lambda) = 0.$$

В дальнейшем на функцию $\rho(\lambda)$ наложим следующее нормирующее условие: $\rho(-0) = 0$.

В настоящей заметке я даю простой способ оценки функции $\rho(\lambda)$ для положительных λ.

Теорема. 1) *Если* $\cos\alpha = 0$, *то для* $\mu \to \infty$

$$\rho(\mu) \leqslant \frac{\pi}{2}\sqrt{\mu} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right). \tag{4'}$$

2) *Если* $\sin\alpha = 0$, *то для* $\mu\to\infty$

$$\rho(\mu) \leqslant \frac{\pi}{4}\sqrt{\mu^3} + O(\sqrt{\mu}). \tag{4''}$$

3) *Если* $\sin\alpha\cos\alpha \neq 0$, *то для* $\mu\to\infty$

$$\rho(\mu) \leqslant \frac{\pi}{2\sin^2\alpha}\sqrt{\mu} + O(1). \tag{4'''}$$

Доказательство. Пусть $\sin\alpha\neq 0$. Перепишем уравнение (1) в виде

$$y'' + \lambda y = q(x)y.$$

Считая правую часть известной и варьируя произвольные постоянные, получим для $\varphi(x,\lambda)$ следующее интегральное уравнение:

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\,x\sin\alpha - \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}}\cos\alpha + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x \sin\sqrt{\lambda}(x-t)\,q(t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt. \tag{5}$$

Отсюда легко следует, что для x в конечном интервале и $\lambda\geqslant 0$ функции $\varphi(x,\lambda)$ равномерно ограничены (см., например, ([3]), стр. 11). Основываясь на этом, легко получить для $x\to 0$ следующую оценку ($\lambda\geqslant 0$)

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\,x\sin\alpha - \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}}\cos\alpha + O\left\{\int_0^x (x-t)\,dt\right\} =$$
$$= \left\{\cos\sqrt{\lambda}\,x\sin\alpha - \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}}\cos\alpha\right\} + O(x^2) = \sin\alpha\cos\sqrt{\lambda}x + O(x). \tag{6}$$

Применим равенство (3) к функции $f_h(x) = \frac{1}{h}$ $(0\leqslant x < h)$, $f_h(x) = 0$ $(x > h)$. Мы получим

$$\frac{1}{h} = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{h}\int_0^h \varphi(x,\lambda)\,dx\right\}^2 d\rho(\lambda) \geqslant \int_{-0}^{\mu}\left\{\frac{1}{h}\int_0^h\varphi(x,\lambda)\,dx\right\}^2 d\rho(\lambda), \tag{7}$$

где μ — произвольное положительное число.

В силу (6) имеем

$$\frac{1}{h}\int_0^h \varphi(x,\lambda)\,dx = \sin\alpha\,\frac{1}{h}\int_0^h \cos\sqrt{\lambda}\,x\,dx + \frac{1}{h}\int_0^h O(x)\,dx =$$
$$= \sin\alpha\,\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,h}{\sqrt{\lambda}\,h} + O(h). \tag{8}$$

Поэтому из неравенства (7) следует

$$\frac{1}{h} \geqslant \int_{-0}^{\mu}\left\{\sin^2\alpha\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,h}{\sqrt{\lambda}\,h}\right)^2 + O(h)\right\} d\rho(\lambda). \tag{9}$$

Положим $\sqrt{\mu}\, h = \frac{\pi}{2}$, следовательно, $\frac{1}{h} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\mu}$. Так как $\sqrt{\lambda} \leqslant \sqrt{\mu}$, то $\sqrt{\lambda} h \leqslant \pi / 2$ и, в силу известного неравенства,

$$\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}\, h}{\sqrt{\lambda}\, h}\right)^2 \geqslant \frac{4}{\pi^2}.$$

Поэтому из неравенства (9) следует

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{\mu} \geqslant \int_{-0}^{\mu} \left\{\frac{4}{\pi^2}\sin^2\alpha + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)\right\} d\rho(\lambda) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\sin^2\alpha \left\{1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)\right\}\rho(\mu).$$

Отсюда следует оценка (4‴).

Если $\cos\alpha = 0$ (следовательно, $\sin\alpha = \pm 1$), то из (7) и (8) следует

$$\frac{1}{h}\int_0^h \varphi(x, \lambda)\, dx = \pm \frac{\sin\sqrt{\lambda} h}{\sqrt{\lambda}\, h} + O(h^2),$$

и поэтому мы получаем более точную оценку (4′).

Пусть теперь $\sin\alpha = 0$, следовательно, $\cos\alpha = \pm 1$. Из интегрального уравнения (5) следует оценка $\varphi(t, \lambda) = O(t)$. Поэтому из того же интегрального уравнения получаем

$$\varphi(x, \lambda) = \pm \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, x}{\sqrt{\lambda}} + O\left\{\int_0^x (x - t)\, t\, dt\right\} = \pm \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, x}{\sqrt{\lambda}} + O(x^3).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{h^2}\int_0^h \varphi(x, \lambda)\, dx = \pm 2\left(\frac{\sin{}^1/{}_2\sqrt{\lambda}\, h}{\sqrt{\lambda}\, h}\right)^2 + O(h^2).$$

Применяя равенство Парсеваля к функции $f_h(x) = 1 / h^2$ $(0 \leqslant x \leqslant h)$, $f_h(x) = 0$ $(x > h)$, мы получим оценку

$$\frac{1}{h^3} \geqslant \int_{-0}^{\mu} \left\{4\left(\frac{\sin{}^1/{}_2\sqrt{\lambda}\, h}{\sqrt{\lambda}\, h}\right)^4 + O(h^2)\right\} d\rho(\lambda).$$

Если $\sqrt{\mu} h / 2 = \pi / 2$, то из последнего неравенства следует

$$\frac{\sqrt{\mu^3}}{\pi^3} \geqslant \int_{-0}^{\mu} \left\{\frac{4}{\pi^4} + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right\} d\rho(\mu) = \frac{4}{\pi^4}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right\}\rho(\mu).$$

Отсюда получаем оценку (4″). Отметим, что оценки (4′), (4″) и (4‴) близки к окончательным, так как в простейшем случае $q(x) \equiv 0$ (см., например, ([3]), стр. 79)

$$\rho(\mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\mu} \frac{\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{\lambda^2 \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}.$$

Легко подсчитать, что при $\cos\alpha = 0$

$$\rho(\mu) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\mu};$$

при $\sin\alpha = 0$

$$\rho(\mu) = \frac{2}{3\pi}\sqrt{\mu^3};$$

наконец, если $\sin\alpha\cos\alpha \neq 0$, то

$$\rho(\mu) = \frac{2}{\pi\sin^2\alpha}\sqrt{\mu} - \frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{\mu}\operatorname{tg}\alpha).$$

Из оценок (4′) и (4‴) легко следует, с помощью интегрирования по частям, что для любого положительного ε

$$\int^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^{1/2+\varepsilon}} < \infty. \tag{10}$$

Из оценки (4″) следует

$$\int^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^{3/2+\varepsilon}} < \infty. \tag{10'}$$

С помощью последних оценок можно получить простые признаки абсолютной сходимости интегралов

$$\int_{-0}^{\infty} F(\lambda)\,\varphi(x, \lambda)\,d\rho(\lambda), \tag{11}$$

где $F(\lambda)$ есть обобщенное преобразование Фурье функции $f(x)$. Если $\sin\alpha \neq 0$, то справедлива оценка (10). Поэтому из неравенства Коши-Буняковского следует, что для абсолютной сходимости интеграла (11) достаточно, чтобы для больших λ выполнялась оценка

$$|F(\lambda)| \leqslant \frac{|F_1(\lambda)|}{\lambda^{1/4+\varepsilon}},$$

где $\varepsilon > 0$ и $\int_{-0}^{\infty} F_1^2(\lambda)\,d\rho(\lambda) < \infty$.

В самом деле,

$$\int^{\infty} |F(\lambda)\varphi(x, \lambda)|\,d\rho(\lambda) \leqslant \sup_{\lambda>0}|\varphi(x, \lambda)| \int^{\infty} |F_1(\lambda)| \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^{1/4+\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\lambda>0}|\varphi(x, \lambda)| \left\{\int_0^{\infty} F_1^2(\lambda)\,d\rho(\lambda)\right\}^{1/2} \left\{\int^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^{1/2+2\varepsilon}}\right\}^{1/2} < \infty.$$

Если $\sin\alpha = 0$, то для абсолютной сходимости интеграла (11) достаточна оценка

$$|F(\lambda)| \leqslant \frac{|F_1(\lambda)|}{\lambda^{3/4+\varepsilon}}.$$

Поступило
23 I 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Weyl, Math. Ann., 68, 220 (1910). [2] E. C. Titchmarsh, Eigenfunctions Expansions..., Oxford, 1946. [3] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, М.-Л., 1950.