Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 4

МАТЕМАТИКА

Б. Я. ЛЕВИН

О РЕГУЛЯРНО РАСТУЩИХ ФУНКЦИЯХ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 2 II 1950)

В основе предлагаемого исследования лежит следующая теорема:

Теорема 1. *Если* $u(z)$ — *гармоническая функция при* $\operatorname{Im} z > 0$ *и непрерывная при* $\operatorname{Im} z \geqslant 0$; *если*

а) $\overline{\lim\limits_{|z|\to\infty}} \frac{u(z)}{|z|} = \sigma < \infty \quad (\operatorname{Im} z \geqslant 0)$;

б) *интеграл* $d = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{dt}{t^2+1}$ *существует*,

то

$$u(z) = \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{dt}{(t-x)^2+y^2} + ky, \tag{1}$$

где

$$y = \operatorname{Im} z > 0, \quad x = \operatorname{Re} z \text{ и } k = \overline{\lim_{y\to\infty}} (u(iy)/y).$$

Доказательство. Обозначив

$$\psi(x) = \int\limits_0^x u(t) \frac{dt}{t^2+1}, \tag{2}$$

мы из условия б) получим, что $|\psi(x)| \leqslant M$ $(-\infty < x < \infty)$ и при любых $a > 0$ и $h > 0$ будем иметь

$$\int\limits_a^{a+h} u(t) \frac{dt}{t^3} = \psi(t) \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3}\right)\Big|_a^{a+h} + \int\limits_a^{a+h} \psi(t) \left(\frac{1}{t^2} + \frac{3}{t^4}\right) dt = O\left(\frac{1}{a}\right). \tag{3}$$

С другой стороны, из а) следует, что $\int\limits_1^{\infty} u(\pm t) t^{-3} dt < \infty$, и, сопоставляя с (3), получим:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{|u(\pm t)|}{t^3} dt < \infty. \tag{4}$$

Обозначая через $v(z)$ первое слагаемое в формуле (1), а $\chi_N(t) = u(t)$ при $|t| \geqslant N$ и $\chi_N(t) = 0$ при $|t| < N$, мы получим:

$$v(z) = o(1) y + \frac{y}{\pi} \left[\psi(t) \frac{t^2}{(t-x)^2+y^2}\Big|_{-\infty}^{N} + \psi(t) \frac{t^2}{(t-x)^2+y^2}\Big|_{N}^{\infty}\right] -$$
$$- \frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_N(t) \frac{d}{dt} \left[\frac{t^2}{(t-x)^2+y^2}\right] dt.$$

Так как $\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}=O(t^{-4})$, то при произвольном $\varepsilon>0$ и $N>N_\varepsilon$ верно $|\psi_N(t)|<\varepsilon$. Заметив, кроме того, что ядро $\frac{d}{dt}\left[\frac{t^2}{(t-x)^2+y^2}\right]$ меняет знак при $t=x+\frac{y^2}{x}$, получим из (6), что

$$|v(z)|<o(1)y+\varepsilon r^2/y \quad (\varepsilon>0). \tag{5}$$

Из а) и (5) можно получить, что гармоническая функция

$$w(z)=u(z)-v(z)-ky \tag{6}$$

удовлетворяет условиям: 1) $w(x)=0$, 2) $w(iy)<o(y)$ и 3) $w(z)<<O(r)+o(r^2)/y$.

В силу условия 1) функцию $w(z)$ можно продолжить нечетно относительно y в нижнюю полуплоскость. Гармоническая функция

$$w_h(z)=\frac{1}{4h^2}\int\limits_{y-h}^{y+h}\int\limits_{\tau-h}^{\tau+h}w(x+it)\,dt\,d\tau$$

удовлетворяет условиям 1) и 2), а условие 3) заменяется условием: 3′) $w_h(z)<o(r^2)$ при $\operatorname{Im}z\geqslant 0$.

Применяя к функции $w_h(z)-\varepsilon y$ $(\varepsilon>0)$ принцип Фрагмена и Линделефа внутри угла $0\leqslant\arg z\leqslant\pi/2$, мы из 1), 2) и 3′) получаем, что $w_h(z)\leqslant\varepsilon y$ при $\operatorname{Im}z\geqslant 0$, и, в силу произвольности $\varepsilon>0$, $w_h(z)\leqslant 0$ $(\operatorname{Im}z\geqslant 0)$.

Переходя далее к пределу при $h\to 0$, получим неравенство

$$w(z)\leqslant 0 \quad (\operatorname{Im}z\geqslant 0). \tag{7}$$

Обозначая через $X(z)$ сопряженную гармоническую функцию, мы построим вещественную целую функцию

$$\varphi(z)=X(z)-iw(z), \tag{8}$$

отображающую верхнюю полуплоскость на верхнюю. По лемме Н. Г. Чеботарева [1, 2], такая функция имеет вид $\varphi(z)=\alpha z+\beta$ $(\alpha\geqslant 0,\ \operatorname{Im}\beta=0)$, а следовательно, $w(z)=-\alpha y$; и так как из (1), (5) и (6) следует

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\frac{w(iy)}{y}=0, \tag{9}$$

то $\alpha=0$ и $w(z)\equiv 0$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если функция* $u(z)$ *удовлетворяет всем условиям теоремы* 1, *то*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{u(re^{i\theta})}{r}=k\sin\theta \quad (0<\theta<\pi). \tag{10}$$

Это следует непосредственно из представления (1) и оценки (5).

Следствие 2. *Если гармоническая при* $\operatorname{Im}z>0$ *функция* $u(z)$ *удовлетворяет условию* а) *теоремы* 1 *и условиям*: б′) $\int\limits_0^\infty\frac{u(t)+u(-t)}{t^2}dt$ *существует и* в) $\overline{\lim_{|x|\to\infty}}\frac{u(x)}{|x|}\leqslant 0$, *то*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{u(re^{i\theta})}{r}=k\sin\theta \quad (0<\theta<\pi). \tag{11}$$

Определение. Функцию $f(z)$, голоморфную и конечной степени внутри угла $\theta_1 < \arg z < \theta_2$, мы называем функцией вполне регулярного роста, если существует

$$h_f(\theta) = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r} \quad (r \,\overline{\in}\, E,\ \theta_1 < \theta < \theta_2). \tag{12}$$

E здесь обозначает некоторое множество нулевой плотности, т. е. такое, что

$$\lim_{r\to\infty} (\operatorname{mes} E_r/r) = 0, \tag{13}$$

где E_r — пересечение множества E и интервала $(0, r)$.

Теорема 2. *Если функция $f(z)$ — голоморфная и конечной степени при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|f(t)|}{1+t^2}\,dt \tag{14}$$

существует, то $f(z)$ вполне регулярного роста в верхней полуплоскости.*

Доказательство. С помощью известной формулы Карлемана мы из (14) получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\operatorname{Im}\frac{1}{\alpha_k}\right| < \infty, \tag{15}$$

где α_k — корни функции $f(z)$.

Построив функции

$$\Theta(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \dfrac{z}{\alpha_k}}{1 - \dfrac{z}{\overline{\alpha}_k}}, \quad f_1(z) = f(z)\,\Theta^{-1}(z)$$

и заметив, что $|f_1(x)| = |f(x)|$, мы получим по следствию 1, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|f_1(re^{i\theta})|}{r} = k\sin\theta \quad (0 < \theta < \pi). \tag{16}$$

Из (15) легко получить, что функция $\Theta(z)$ удовлетворяет при $\delta < \arg z < \pi - \delta$ $(\delta > 0)$ и $r \,\overline{\in}\, E_{\delta,\varepsilon}$ ($E_{\delta,\varepsilon}$ — множество нулевой плотности) неравенству

$$-\varepsilon r < \ln|\Theta(z)| \leqslant 0.$$

Отсюда и из (16) легко следует утверждение теоремы.

Аналогично доказывается:

Теорема 3. *Если функция $f(z)$ — голоморфная, конечной степени в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ и удовлетворяет условиям:*

---

* Можно утверждать несколько больше, а именно, что функция $f(z)$ «имеет степень» по каждому лучу при $(\delta \leqslant \theta \leqslant \pi - \delta)$ $(\delta > 0)$ в смысле, определенном С. Н. Бернштейном ([3]). В этой статье С. Н. Бернштейна есть результат, аналогичный теореме 2. Аналогичный результат есть также в статье М. Г. Крейна ([7]). Теорема 2 дает некоторое усиление известной теоремы Картрайт ([4]). У Картрайт в (14) вместо $\ln|f(t)|$ стоит $\ln_+|f(t)|$, что для функций конечной степени является несколько более сильным требованием.

α) $\int\limits_1^\infty t^{-2}\ln|f(t)f(-t)|\,dt$ *существует и* β) $h_f(0)+h_f(\pi)\leqslant 0$, *то* $f(z)$ *вполне регулярного роста в верхней полуплоскости**.

В теории целых функций особую роль играют функции, удовлетворяющие условию (15). Эти функции названы были Н. Н. Мейманом функциями класса A. Н. И. Ахиезер (9) и Н. Н. Мейман (8) независимо друг от друга доказали, что необходимым и достаточным условием принадлежности целой функции $f(z)$ конечной степени классу A является ограниченность интеграла**

$$\int\limits_0^N \frac{\ln|f(t)f(-t)|}{1+t^2}\,dt < M_f \quad (N>0). \tag{17}$$

С помощью теорем 2 и 3 легко доказать следующие теоремы.

Теорема 4. *Для того чтобы целая функция конечной степени была функцией класса* A *и чтобы множество ее корней имело плотность, т. е. чтобы существовал предел*

$$\Delta=\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r},$$

необходимо и достаточно существование интеграла

$$\int\limits_0^\infty \frac{\ln|f(t)f(-t)|}{1+t^2}\,dt. \tag{18}$$

Теорема 5. *Для того чтобы целая функция* $f(z)$ *конечной степени была функцией класса* A *и вполне регулярного роста, необходимо и достаточно, чтобы:* 1) *существовал интеграл* (18) *и* 2) *индикаторная диаграмма функции* $f(z)$ *была отрезком на оси* Oy.

В заключение отметим, что для функций конечной степени и класса A полная регулярность роста эквивалентна следующим условиям:

1) *Существует* $\beta=\lim\limits_{r\to\infty}(n_1(r)/r)=\lim\limits_{r\to\infty}(n_2(r)\,r)$, *где* $n_1(r)$ *и* $n_2(r)$ — *число корней функции* $f(z)$, *соответственно, в полукругах* $|z|<r$, $\operatorname{Re} z>0$ *и* $|z|<r$, $\operatorname{Re} z<0$.

2) *Существует предел* $\delta=\lim\limits_{r\to\infty}\sum\limits_{|\alpha_k|<r}\frac{1}{\alpha_k}$, *где* α_k — *корни функции* $f(z)$.

Научно-исследовательский институт
математики и механики
Харьковского государственного университета

Поступило
29 XII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Г. Чеботарев, Math. Ann., 99, 660 (1928). [2] Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов, 1937. [3] С. Н. Бернштейн, ДАН, 66, № 4 (1949). [4] M. Cartwright, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 38, part 6, 417; 7, 503 (1935); Proc. Cambr. Math. Soc., 34, 347 (1935). [5] N. Levinson, Gap and Density Theorems, 1940, p. 25—42. [6] Б. Левин, ДАН, 41, № 2 (1943). [7] М. Г. Крейн, Изв. АН СССР, сер. матем., 11, 309 (1947). [8] Н. Г. Чеботарев — Н. Н. Мейман, Проблема Рауса-Гурвица, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 36 (1949). [9] Н. И. Ахиезер, ДАН, 63, № 5 (1948). [10] Б. Левин, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, 45 (1950).

* Теорема, аналогичная теореме 3, была доказана Н. Левинсоном для целых функций конечной степени (5).

** См. также (10).