Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 4

МАТЕМАТИКА

Г. Ф. ЛАПТЕВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ МНОГООБРАЗИЙ И ИХ ГРУППЫ ГОЛОНОМИИ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 7 II 1950)

1. В настоящей работе выделяются те требования, при выполнении которых в многообразии локальных пространств устанавливается линейная дифференциальная связность, обладающая группой голономии ([1,2]). Доказывается, что в случае конечности группы голономии такое многообразие эквивалентно многообразию с дифференциальной групповой связностью, т. е. многообразию, локальные пространства которого однородны и дифференциальная связность которого определяется уравнениями, аналогичными уравнениям инфинитезимального преобразования фундаментальной группы, причем роль фундаментальной группы играет группа голономии. Важным следствием этого факта является сведение задачи классификации дифференциальных связностей к задаче классификации групп преобразований Ли.

2. Пусть имеется топологическое пространство B (базисное пространство), элементами которого являются также топологические пространства E (локальные пространства). Пусть при этом выполняются следующие требования:

Требование 1. Базисное пространство B гомеоморфно области N-мерного евклидова пространства.

Следовательно, в базисном пространстве B можно ввести координаты так, что каждой системе значений N координат $u^1, \ldots, u^N$ из некоторой области будет соответствовать определенное локальное пространство $E(u)$ и обратно.

Требование 2. Все локальные пространства являются n-мерными топологическими пространствами, гомеоморфными некоторой области n-мерного евклидова пространства.

Следовательно, в каждом локальном пространстве можно ввести координаты так, что будет установлен гомеоморфизм локальных пространств по принципу равенства координат соответствующих точек. Такой гомеоморфизм будем называть начальным соответствием локальных пространств при выбранной системе отнесения. Координаты точки локального пространства $E(u)$ будем обозначать $x^1(u), \ldots, x^n(u)$, или, короче, $x^1, \ldots, x^n$.

Замечание. Требование 2 можно было бы заменить более естественным и широким требованием аналитического изоморфизма локальных пространств некоторому n-мерному аналитическому многообразию. Однако для упрощения изложения мы ограничимся требованием 2.

3. Пусть установлено множество отображений любого соседнего локального пространства $E(u + du)$ на произвольное исходное $E(u)$,

подчиняющихся при выбранной системе отнесения и при определенном ею начальном соответствии следующим требованиям.

Требование 3. Координаты $x^i(u, du)$ образа точки $x^i(u+du)$ соседнего локального пространства $E(u+du)$ в исходном локальном пространстве $E(u)$ являются дифференцируемыми функциями относительно дифференциалов аргументов $du^1, \ldots, du^N$ при их нулевых значениях, т. е. отображения имеют вид

$$x^i(u+du) \to x^i(u, du) = f^i(\Xi) + f^i_J(\Xi_1)\, du^J + \rho\varepsilon^i, \tag{1}$$

где $\rho = \sum_{J=1}^{N} |du^J|$; $\lim_{\rho \to 0} \varepsilon^i = 0$; $i, k = 1, \ldots, n$; $J, K = 1, \ldots, N$; Ξ и Ξ_1 — множества аргументов, не зависящих от du^J.

Требование 4. При нулевых значениях дифференциалов аргументов отображения сводятся к тождественному отображению исходного пространства на себя, т. е.

$$f^i(\Xi) = x^i(u).$$

Требование 5. Коэффициенты $f^i_J(\Xi_1)$ при дифференциалах du^J в линейных членах выражения (1), определяющего отображение, являются вполне определенными аналитическими функциями от $x^i(u)$ и u^K и только от них, т. е.

$$f^i_J(\Xi) = f^i_J(x^k(u); u^K).$$

Следовательно, все отображения имеют вид:

$$x^i(u+du) \to x^i(u, du) = x^i(u) + f^i_J(x^k(u); u^K)\, du^J + \rho\varepsilon^i. \tag{2}$$

Определение. Многообразие B локальных пространств $E(u)$, удовлетворяющее требованиям 1, 2, с установленным в нем отображением локальных пространств, удовлетворяющим требованиям 3, 4, 5, мы будем называть многообразием с дифференциальной связностью. Главная часть определяющего связность отображения определяется уравнениями

$$dx^i = f^i_J(x^k, u^K)\, du^J, \tag{3}$$

которые будем называть уравнениями связности.

Обратимое аналитическое преобразование переменных

$$x^i = x^i(\tilde{x}^k, \tilde{x}^K), \quad u^J = u^J(u^K) \tag{4}$$

отображает наше многообразие локальных пространств с дифференциальной связностью в такое же. Поэтому указанные преобразования мы будем считать допустимыми, а получаемые при помощи их многообразия — эквивалентными.

4. Требование 6. В базисном пространстве B существует множество допустимых непрерывных линий, обладающих следующими свойствами:

а) каждая допустимая линия состоит из конечного числа аналитических кусков, вдоль каждого из которых система (3) интегрируется при любых начальных условиях;

б) линия, состоящая из конечного числа допустимых линий, также допустима;

в) текущая точка $M(u)$ соединима с некоторой фиксированной точкой $M_0(u_0)$ допустимой аналитической линией, аналитически зависящей от $M(u)$;

г) из текущей точки в любом направлении выходит допустимая линия, аналитически зависящая от точки и направления.

Таким образом, каждой допустимой линии, соединяющей две точки базисного пространства B, будет соответствовать взаимно-однозначное отображение друг на друга локальных пространств, соответствующих этим точкам.

Преобразования локального пространства $E(u)$ в себя, соответствующие всевозможным допустимым замкнутым линиям, исходящим из данной точки $(u^1, \ldots, u^N)$ базисного пространства B и оканчивающимся в ней, образуют группу, называемую группой голономии. Эта группа одна и та же для всех локальных пространств.

Соединим фиксированную точку $M_0(u_0)$ базисного пространства B с его текущей точкой $M(u)$ допустимой линией, аналитически зависящей от $u^1, \ldots, u^N$, и назовем эту линию координирующей. Эта линия приведет в соответствие каждой точке $x^i(u)$ из $E(u)$ точку $x^i(u_0)$ из $E(u_0)$ и обратно. Мы будем предполагать, что выполнено такое допустимое преобразование локальных систем координат, в результате которого указанное соответствие точек пространств $E(u_0)$ и $E(u)$ осуществляется по принципу равенства координат.

Из текущей точки $M(u)$ проведем допустимую линию в направлении $(\lambda^1, \ldots, \lambda^N)$:

$$u^J(t) = \varphi^J(t; u^K; \lambda^K); \quad u^J(t)\Big|_{t=0} = u^J; \quad \frac{\partial u^J(t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \lambda^J.$$

Проинтегрировав вдоль этой линии систему (3), мы получим

$$x^i(t) = \psi^i(t, x^k, u^K, \lambda^K), \tag{5}$$

причем

$$x^i(t)\Big|_{t=0} = x^i; \quad \frac{\partial x^i(t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = f^i_J(x^k, u^K)\lambda^J.$$

Формула (5) определяет отображение локального пространства $E[u(t)]$ на локальное пространство $E(u)$.

Соединив точки $M(u)$ и $\widetilde{M}[u(t)]$ координирующими линиями с точкой $M_0(u_0)$, мы получим замкнутую допустимую линию $M\widetilde{M}M_0M$. Отображение локального пространства на себя вдоль этой линии будет также определяться формулой (5).

Итак, преобразование (5), определяющее отображение соседнего пространства $E[u(t)]$ на исходное $E(u)$, принадлежит группе голономии.

5. Требование 7. Группа голономии является конечной (r-членной) группой Ли.

Определение. При выполнении дополнительных требований 6 и 7 мы будем говорить, что дифференциальная связность многообразия является связностью, обладающей конечной группой голономии.

Пусть инфинитезимальное преобразование этой группы определяется уравнением

$$dx^i = \xi^i_p(x^k)\,\vartheta^p \quad (p = 1, \ldots, r), \tag{6}$$

где ϑ^p — линейные инвариантные формы группы, а $\xi^i_p(x^k)$ — коэффициенты ее инфинитезимальных операторов X_p, т. е.

$$X_p = \xi^i_p(x^k)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Тогда конечное преобразование группы будет иметь вид

$$\widetilde{x}^i = x^i + \xi^i_p(x^k)\,a^p + \ldots$$

Сравнив эту формулу с формулой (5), мы получим следующую теорему.

Теорема. *Дифференциальная связность многообразия, обладающая конечной группой голономии, при подходящем выборе координатных систем в локальных пространствах определяется уравнениями*

$$dx^i = \xi^i_p(x^k)\,\omega^p, \tag{7}$$

причем $X_p = \xi^i_p(x^k)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ *— инфинитезимальные операторы группы голономии,* $\omega^p = \Gamma^p_J(u^K)\,du^J$ *— формы, определяющие связность.*

Замечание. Допустимыми преобразованиями, не нарушающими вида уравнений (7), будут теперь являться лишь те преобразования (4), при которых преобразования координат локальных пространств $x^i = x^i(\widetilde{x}^k, \widetilde{u}^K)$ принадлежат группе голономии.

Следствие. *Перечисление всех типов связностей N-мерного многообразия n-мерных локальных пространств, обладающих конечной группой голономии, сводится к перечислению всех конечных групп Ли, допускающих n-мерное представление.*

Если, например, $n = 1$, то, как известно ([3]), имеется только 4 типа конечных групп Ли: 1) $X = 0$; 2) $X_1 = p$; 3) $X_1 = p$, $X_2 = xp$; 4) $X_1 = p$, $X_2 = xp$, $X_3 = x^2p$.

В соответствии с этим получается и 4 типа связностей многообразий одномерных локальных пространств: 1) $dx = 0$; 2) $dx = \Gamma_J du^J$; 3) $dx = \Gamma_J du^J + x\Gamma_{1J} du^J$; 4) $dx = \Gamma_J du^J + x\Gamma_{1J} du^J + x^2\Gamma_{2J} du^J$. Эти связности были перечислены В. В. Вагнером ([2]). Столь же просто перечислить все связности многообразий двумерных локальных пространств, опираясь на известное перечисление групп Ли на плоскости ([3]).

Поступило
5 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Картан, 8-й Международный конкурс на соискание премии им. Н. И. Лобачевского, 1937, Отчет, стр. 63—110. [2] В. В. Вагнер, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, в. 7, 205 (1949). [3] Н. Г. Чеботарев, Теория групп Ли, 1940, гл. IV.