Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 5

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. Г. МИРИМАНОВ

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ПРИКЛАДНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

(Представлено академиком Б. А. Введенским 15 II 1950)

1. Значительное число задач прикладной электродинамики сводится к определению электромагнитного поля в пространстве, в котором, помимо заданных источников, расположено одно или несколько тел сравнительно общего вида, не обладающих осевой симметрией. Решение этого класса задач может быть получено применением векторного аналога теоремы Остроградского — Грина.

2. Предположим, что в бесконечно протяженную однородную среду кроме источников помещено несколько однородных тел произвольной формы. Допустим, что зависимость векторов поля от времени имеет вид $e^{i\omega t}$, где ω — угловая частота. Уравнения электромагнитного поля напишем в виде:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} = -\mathbf{J}^*, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\rho^*;\\ &\operatorname{rot}\mathbf{H} + i\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{J}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho. \end{aligned} \tag{1}$$

Величины $\mathbf{J}^*$ и ρ^* являются фиктивными плотностями „магнитных токов“ и „магнитных зарядов“. Вводятся они для того, чтобы получить возможность рассматривать разрывы тангенциальных компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, запрещаемые уравнениями Максвелла. Токи и заряды обоих типов подчинены, кроме того, уравнениям непрерывности:

$$\operatorname{div}\mathbf{J} - i\omega\rho = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{J}^* - i\omega\rho^* = 0. \tag{2}$$

Векторы электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитного поля $\mathbf{H}$ в общем случае удовлетворяют неоднородным волновым уравнениям:

$$\begin{aligned} &\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{J} + \operatorname{rot}\mathbf{J}^* + \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\rho,\\ &\nabla^2\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = i\omega\mu\mathbf{J}^* + \operatorname{rot}\mathbf{J} + \frac{1}{\mu}\operatorname{grad}\rho^*. \end{aligned} \tag{3}$$

В частном случае при отсутствии в среде источников они удовлетворяют однородным волновым уравнениям:

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = 0. \tag{4}$$

Интегрирование уравнений (3) может быть произведено с помощью векторного аналога теоремы Остроградского — Грина. Действительно, рассмотрим область V, изображенную на рис. 1, ограниченную поверхностями $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Тогда, если $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ суть две векторные функции положения в этой области, каждая из которых непрерывна и имеет непрерывные первую и вторую производные внутри области и на ее границах, а $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности, согласно теореме Остроградского — Грина имеем:

$$\int\limits_V (\mathbf{Q}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{P} - \mathbf{P}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{Q})\,dv = \int\limits_{S_1+S_2+\ldots+S_n} \{[\mathbf{P}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{Q}] - [\mathbf{Q}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{P}]\}\mathbf{n}\,dS. \quad (5)$$

Положив в (5) $\mathbf{P} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{Q} = \varphi\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — единичный вектор произвольного направления, а $\varphi = \frac{e^{ik\,|r-r'|}}{|r-r'|}$, после несложных преобразований получим:

$$+\int\limits_V \left\{ i\,\omega\varepsilon\,\mathbf{J} + [\mathbf{J}^*\,\mathrm{grad}\,\varphi] + \frac{1}{\varepsilon}\rho\,\mathrm{grad}\,\varphi \right\} dv -$$

$$-\int\limits_{S_1+S_2+\ldots+S_n} \{+\,i\,\omega\mu\varphi\,[\mathbf{nH}] + [[\mathbf{nE}]\,\mathrm{grad}\,\varphi] + (\mathbf{nE})\,\mathrm{grad}\,\varphi\}\,dS =$$

$$\begin{aligned} &= 4\pi\,\mathbf{E}(r), \text{ если } r \text{ находится внутри } V; \\ &= 0, \qquad\quad \text{ если } r \text{ находится вне } V. \end{aligned} \quad (6)$$

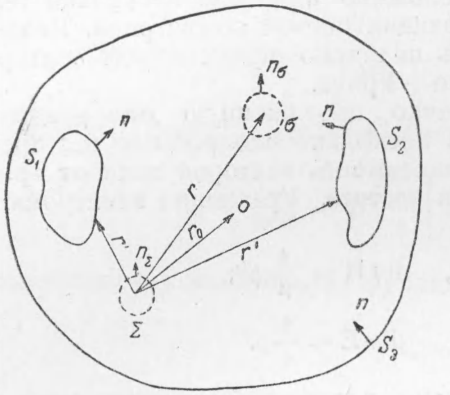

Рис. 1

Поверхностный интеграл в выражении (6) берется по всем ограничивающим область V поверхностям, в том числе по поверхности всех расположенных в области тел.

Предположим, что проводимость всех тел одинакова. Тогда на поверхности будут иметь место следующие единые граничные условия:

$$[\mathbf{E}_a\mathbf{n}] = [\mathbf{E}_b\mathbf{n}], \quad [\mathbf{H}_a\mathbf{n}] = [\mathbf{H}_b\mathbf{n}],$$

$$(\mathbf{nE}_a) = \frac{\mu_a k_b^2}{\mu_b k_a^2}(\mathbf{nE}_b), \quad (7)$$

$$(\mathbf{nH}_a) = \frac{\mu_b}{\mu_a}(\mathbf{nH}_b).$$

Допустим, кроме того, что проводимость тел, помещенных в области V, конечна, но достаточно велика, чтобы считать объемные заряды и токи внутри тел равными нулю.

Источником поля в области V будем считать электрический диполь, расположенный в точке r_0. Для того чтобы исключить из объема точку расположения диполя r_0, в которой нарушается регулярность поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, окружим диполь сферой бесконечно малого радиуса поверхностью Σ и к интегралу по поверхностям тел, ограничивающим объем V, добавим интеграл по поверхности сферы Σ. Этот интеграл, как нетрудно показать, будет равен $4\pi\mathbf{E}_0(r)$.

3. Применяя выражение (6) к объему V', а затем применяя его последовательно к пространствам внутри тел и суммируя полученные выражения с учетом граничных условий (7), получим:

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{E}_0(r) + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_b k_a^2}{\mu_a k_b^2} - 1\right) \int\limits_{S_1+S_2+\ldots+S_n} (\mathbf{nE}(r'))\,\mathrm{grad}\,\varphi\,dS \quad (8)$$

и аналогичным путем

$$\mathbf{H}(r) = \mathbf{H}_0(r) + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_a}{\mu_b} - 1\right) \int\limits_{S_1+S_2+\ldots+S_n} (\mathbf{nH}(r'))\,\mathrm{grad}\,\varphi\,dS. \quad (9)$$

Полученные формулы (8) и (9) очень просты по своей структуре и выгодно отличаются тем, что полностью определяют векторы поля, а не их проекции.

Формулы эти имеют простой физический смысл. Из них непосредственно следует, что поле внутри области V складывается из поля возбуждающего поле диполя и полей электрических и магнитных диполей, распределенных с поверхностной плотностью, равной, соответственно, $(\mathbf{nE})$ и $(\mathbf{nH})$ на всех ограничивающих объем поверхностях. Не представляет также труда перейти к плотности электрических и магнитных токов, эквивалентных распределению диполей. Поля этих фиктивных диполей (или токов), распределенных по поверхностям $S_1, S_2, \ldots, S_n$, выражаются поверхностными интегралами, содержащимися в формулах (8) и (9). Первые члены в правых частях уравнений (8) и (9) соответствуют полю первичного возбуждающего поле диполя. При отсутствии в области V посторонних тел $S_1, S_2, \ldots, S_n$ поле в любой точке пространства определяется только этими членами.

4. В том случае, когда в области V расположено одно тело S_1, уравнения (8) и (9) соответственно упрощаются. Вместо (8) имеем:

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{E}_0(r) + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_b k_a^2}{\mu_a k_b^2} - 1\right)\int\limits_{S_1} (\mathbf{nE}(r'))\,\mathrm{grad}\,\varphi\, dS. \qquad (10)$$

В частности, когда это тело представляет собой идеально проводящую бесконечную плоскость:

$$-\int\limits_{S_2} (\mathbf{nE}(r'))\,\mathrm{grad}\,\varphi\, dS = 2\pi \mathbf{E}_n(r), \qquad \frac{\mu_b k_a^2}{\mu_b k_b^2} = 0, \qquad (11)$$

и из уравнения (10) получим:

$$E_n(r') = 2E_{0n}(r'), \qquad (12)$$

т. е. удвоение фактического значения $E_n(r')$ на поверхности раздела по сравнению со значением $E_{0n}(r')$ первичного поля на ней. Этот результат выражает обычный закон отражения для идеально проводящей плоскости.

5. Для случая тонкой незамкнутой поверхности конечной кривизны интегральное уравнение (10) может быть значительно упрощено. Действительно, полагая, что поверхность имеет всюду одинаковую толщину h и пренебрегая, благодаря малости величины h, поверхностью тонких концов, будем считать, что поверхность, по которой берется поверхностный интеграл в уравнении (10), состоит из двух параллельных частей S_{I} и S_{II}. Тогда, разлагая подинтегральное выражение в ряд Тейлора, можем написать:

$$(\mathbf{nE})\,\mathrm{grad}\,\varphi\Big|_b = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^m}{m!}\frac{\partial^m}{\partial n'^m}\{(\mathbf{nE}(r'))\,\mathrm{grad}\,\varphi(r, r_{\mathrm{I}}')\}, \qquad (13)$$

$$\int\limits_S (\mathbf{nE}(r_{\mathrm{I}}'))\,\mathrm{grad}\,\varphi(r_{\mathrm{I}}', r)\Big|_b dr' =$$

$$= \int \frac{h^m}{m!}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial n'^m}\{\mathbf{nE}(r_{\mathrm{I}}'))\,\mathrm{grad}\,\varphi(r, r_{\mathrm{I}}')\}\, dr'. \qquad (14)$$

Но

$$\frac{\partial^m}{\partial n'^m}\{(\mathbf{nE}(r_{\mathrm{I}}'))\,\mathrm{grad}\,\varphi(r, r_{\mathrm{I}}')\} = \frac{\partial^m}{\partial n'^m}(\mathbf{nE}(r_{\mathrm{I}}'))\,\mathrm{grad}\,\varphi +$$

$$+\binom{m}{1}\frac{\partial^{m-1}}{\partial n'^{m-1}}(\mathbf{nE}(r_{\mathrm{I}}'))\frac{\partial}{\partial n'}\mathrm{grad}\,\varphi + \binom{m}{2}\frac{\partial^{m-2}}{\partial n'^{m-2}}(\mathbf{nE}(r_{\mathrm{I}}'))\frac{\partial^2}{\partial n'^2}\mathrm{grad}\,\varphi + \ldots$$

$$\ldots + \binom{m}{m-1} \frac{\partial}{\partial n'} (\mathbf{nE}(r_1')) \frac{\partial^{m-1}}{\partial n'^{m-1}} \operatorname{grad} \varphi + (\mathbf{nE}(r_1')) \frac{\partial^m}{\partial n'^m} \operatorname{grad} \varphi. \tag{15}$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{E}_0(r) + + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_b k_a^2}{\mu_a k_b^2} - 1 \right) \int_S \frac{h^m}{m!} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{j-1} \frac{\partial^j}{\partial n'^j} \varphi \frac{\partial^{m-j+1}}{\partial n^{m-j+1}} \mathbf{E}(r') \bigg|_b dr'. \tag{16}$$

Наиболее простым и естественным методом решения полученного интегро-дифференциального уравнения (16) является, очевидно, разложение решения в ряд по малому параметру

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \sum_{t=0}^{\infty} h^t \mathbf{E}_t. \tag{17}$$

Подставляя этот ряд в уравнение (16) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h справа и слева, получим систему уравнений для определения искомой напряженности поля в произвольной точке пространства

$$\mathbf{E}_t(r) = = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_b k_a^2}{\mu_a k_b^2} - 1 \right) \int_S \sum_{m=1}^{t} \frac{1}{m!} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m}{j-1} \frac{\partial^j}{\partial n'^j} \varphi(r, r') \frac{\partial^{m-j+1}}{\partial n'^{m-j+1}} \mathbf{E}_{t-m}(r') \bigg|_b dr'$$

$$(t = 1, 2, \ldots, \infty). \tag{18}$$

Для практических целей в большинстве случаев достаточно ограничиться первым членом ряда (17). В этом случае получим:

$$\mathbf{E}_1(r) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_b k_a^2}{\mu_a k_b^2} - 1 \right) \int_S \frac{\partial}{\partial n'} \varphi \frac{\partial}{\partial n'} \mathbf{E}_0 =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_b k_a^2}{\mu_a k_b^2} - 1 \right) \mathbf{a} E \int_S - k^2 \cos\alpha \cos\gamma \frac{\exp\{[\,|r - r'| + |r' - r_0|\,] ik\}}{|r - r'|\,|r' - r_0|} dr', \tag{19}$$

где $\mathbf{a}$ — единичный вектор произвольного направления, соответствующий поляризации падающего поля; γ — угол между $r' - r_0$ и n' и α — угол между n' и $r' - r$, и (16) примет вид:

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{E}_0(r) + h\mathbf{E}_1(r) = = \mathbf{E}_0(r) + \frac{h}{4\pi} \left(\frac{\mu_b k_a^2}{\mu_a k_b^2} - 1 \right) E\, \mathbf{a} \int_S - k^2 \cos\alpha \cos\gamma \frac{\exp\{ik_a[\,|r-r'| + |r'-r_0|\,]\}}{|r - r'|\,|r' - r_0|} dr'. \tag{20}$$

Выражение (20) может служить основой решения ряда дифракционных задач, возникающих в современной технике дециметровых и сантиметровых волн. В частности, оно позволяет производить инженерные расчеты различного типа антенных устройств, не обладающих осевой симметрией.

Следует особо подчеркнуть, что формула (20) сохраняет свой смысл и для замкнутых поверхностей, если предположить, что проводимость тела достаточно велика и глубина проникновения поля в глубь его может быть принята за параметр малости.

В заключение автор выражает свою искреннюю благодарность акад. Б. А. Введенскому и чл.-корр. АН СССР А. Н. Тихонову за систематическую помощь в работе.

Институт автоматики и телемеханики
Академии наук СССР

Поступило
14 II 1950