**Доклады Академии Наук СССР**
**1950. Том LXXI, № 5**

*ФИЗИКА*

Б. Н. ФИНКЕЛЬШТЕЙН и Н. С. ФАСТОВ

# К ТЕОРИИ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

*(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 14 II 1950)*

Существование в твердых телах релаксационных явлений (зависимость упругих модулей от частоты приложенной к телу внешней силы и др.) указывает на ограниченную применимость классической теории упругости, которая рассматривает деформирование упругого тела как процесс в термодинамическом смысле квази-статический.

Теоретическое исследование этих явлений основывалось до сих пор на формальном обобщении теории упругости как путем введения в обобщенный закон Гука производных по времени от напряжений и деформаций ([1]), так и в направлении развития больцмановской теории упругого последействия ([2]).

Нами сделана попытка построить теорию релаксационных явлений в твердых телах на основе общих термодинамических соображений, аналогичных тем, которые были выдвинуты Л. И. Мандельштамом и М. А. Леонтовичем в теории поглощения звука в жидкостях ([3]).

Если изменение напряженного состояния в упругом теле происходит с конечной скоростью, то в каждый момент времени в теле имеет место отклонение от состояния статистического равновесия.

Тем самым в процесс деформирования вносится существенная необратимость, которая должна проявляться в рассеянии энергии, т. е. в необратимом превращении упругой энергии в теплоту.

Для характеристики мгновенного отклонения состояния тела от статистического равновесия введем тензор релаксации $\xi_{ik}$.

Ограничимся здесь только случаем изотермических изменений состояния тела.

Для небольших деформаций $\varepsilon_{ik}$ и для малых отклонений от статистического равновесия свободную энергию единицы объема изотропного упругого тела можно представить в виде линейной комбинации квадратичных инвариантов тензоров $\varepsilon_{ik}$ и $\xi_{ik}$:

$$F = F_0 + a\varepsilon_{ll}^2 + b\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\delta_{ik}\right)^2 + \bar{a}\xi_{ll}^2 + \bar{b}\left(\xi_{ik} - \frac{1}{3}\xi_{ll}\delta_{ik}\right)^2 + h\varepsilon_{ll}\xi_{nn} + g\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\delta_{ik}\right)\left(\xi_{ik} - \frac{1}{3}\xi_{ll}\delta_{ik}\right). \quad (1)$$

Обозначим через $\bar{\xi}_{ik}$ значения тензора релаксации, удовлетворяющие условию:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_{ik}} = 0 \quad \text{при } \xi_{ik} = \bar{\xi}_{ik}. \quad (2)$$

Из (1) получаем:

$$\bar{\xi}_{ll} = -\frac{h}{2\bar{a}}\,\varepsilon_{ll}, \tag{3}$$

$$\bar{\xi}_{ik} - \frac{1}{3}\,\bar{\xi}_{ll}\delta_{ik} = \frac{g}{2\bar{b}}\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\,\varepsilon_{ll}\delta_{ik}\right). \tag{4}$$

Скорость изменения тензора релаксации $\dot{\xi}_{ik}$ в случае малых отклонений от статистического равновесия можно разложить в ряд по степеням разности $\xi_{ik} - \bar{\xi}_{ik}$ и ограничиться в этом разложении линейным членом:

$$\dot{\xi}_{ik} - \frac{1}{3}\,\dot{\xi}_{ll}\delta_{ik} = -\frac{1}{\tau_1}\left(\zeta_{ik} - \frac{1}{3}\zeta_{ll}\delta_{ik}\right), \tag{5}$$

$$\dot{\xi}_{ll} = -\frac{1}{\tau_2}\,\zeta_{ll}, \tag{6}$$

где введено обозначение $\zeta_{ik} = \xi_{ik} - \bar{\xi}_{ik}$.

С помощью (3) и (4) получаем из (5) и (6)

$$\zeta_{ik}(t) - \frac{1}{3}\,\zeta_{ll}(t)\,\delta_{ik} = \frac{g}{2\bar{b}}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t'}{\tau_1}}\left[\dot{\varepsilon}_{ik}(t') - \frac{1}{3}\,\dot{\varepsilon}_{ll}(t')\,\delta_{ik}\right]dt, \tag{7}$$

$$\zeta_{ll}(t) = \frac{h}{2\bar{a}}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t'}{\tau_2}}\,\dot{\varepsilon}_{ll}(t')\,dt'. \tag{8}$$

Выражение (1) можно теперь представить в виде

$$F = F_0 + \left(a - \frac{h^2}{4\bar{a}}\right)\varepsilon_{ll}^2 + \left(b - \frac{g^2}{4\bar{b}}\right)\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\,\varepsilon_{ll}\delta_{ik}\right)^2 +$$
$$+ \bar{a}\,\zeta_{ll}^2 + \bar{b}\left(\zeta_{ik} - \frac{1}{3}\,\zeta_{ll}\delta_{ik}\right)^2.$$

Тензор напряжений определяется соотношением

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ik}} = 2\left(a - \frac{h^2}{4\bar{a}}\right)\varepsilon_{ll}\delta_{ik} + 2\left(b - \frac{g^2}{4\bar{b}}\right)\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\,\varepsilon_{ll}\delta_{ik}\right) +$$
$$+ h\zeta_{ll}\delta_{ik} + g\left(\zeta_{ik} - \frac{1}{3}\,\zeta_{ll}\delta_{ik}\right). \tag{9}$$

Для медленных деформаций можно приближенно положить

$$\zeta_{ik} - \frac{1}{3}\,\zeta_{ll}\delta_{ik} \cong \frac{g}{2\bar{b}}\,\tau_1\left(\dot{\varepsilon}_{ik} - \frac{1}{3}\,\dot{\varepsilon}_{ll}\delta_{ik}\right), \quad \zeta_{ll} \cong \frac{h}{2\bar{a}}\,\tau_2\dot{\varepsilon}_{ll}.$$

Подстановка в (9) дает

$$\sigma_{ik} = 2\left(a - \frac{h^2}{4\bar{a}}\right)\varepsilon_{ll}\delta_{ik} + 2\left(b - \frac{g^2}{4\bar{b}}\right)\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\,\varepsilon_{ll}\delta_{ik}\right) +$$
$$+ \frac{h^2}{2\bar{a}}\,\tau_2\dot{\varepsilon}_{ll}\delta_{ik} + \frac{g^2}{2\bar{b}}\,\tau_1\left(\dot{\varepsilon}_{ik} - \frac{1}{3}\,\dot{\varepsilon}_{ll}\delta_{ik}\right). \tag{10}$$

Сравнение с выражением для тензора напряжений упруго-деформированного тела, находящегося в состоянии равновесия ($\dot{\varepsilon}_{ik} = 0$), позволяет положить

$$2a - \frac{h^2}{2\bar{a}} = K, \quad b - \frac{g^2}{4\bar{b}} = \mu,$$

где $K$ — статический модуль всестороннего сжатия, $\mu$ — статический модуль сдвига. Коэффициенты $\frac{g^2}{2b}\tau_1$ и $\frac{h^2}{2a}\tau_2$ имеют размерность $\frac{\text{г}}{\text{см}\cdot\text{сек}}$; следовательно, введя два коэффициента вязкости (см. также ([4]), стр. 607)

$$\frac{g^2}{2b}\tau_1 = 2\eta_1, \quad \frac{h^2}{2a}\tau_2 = \eta_2,$$

получаем

$$\sigma_{ik} = K\varepsilon_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\delta_{ik}\right) + \eta_2\dot{\varepsilon}_{ll}\delta_{ik} + 2\eta_1\left(\dot{\varepsilon}_{ik} - \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{ll}\delta_{ik}\right). \tag{11}$$

Для произвольных скоростей деформирования

$$\sigma_{ik} = K\varepsilon_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\delta_{ik}\right) + \frac{\eta_2}{\tau_2}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t'}{\tau_2}}\dot{\varepsilon}_{ll}(t')\,\delta_{ik}dt' +$$

$$+ 2\frac{\eta_1}{\tau_1}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t'}{\tau_1}}\left[\dot{\varepsilon}_{ik}(t') - \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{ll}(t')\,\delta_{ik}\right]dt' \tag{12}$$

или

$$\sigma_{ik} = \left(K + \frac{\eta_2}{\tau_2}\right)\varepsilon_{ll}(t)\,\delta_{ik} + 2\left(\mu + \frac{\eta_1}{\tau_1}\right)\left(\varepsilon_{ik}(t) - \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}(t)\,\delta_{ik}\right) -$$

$$- \frac{\eta_2}{\tau_2^2}\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\tau_2}}\varepsilon_{ll}(t-\tau)\delta_{ik}\,d\tau - 2\frac{\eta_1}{\tau_1^2}\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\tau_1}}\left[\varepsilon_{ik}(t-\tau) - \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}(t-\tau)\,\delta_{ik}\right]d\tau. \tag{13}$$

Предположим, что

$$\varepsilon_{ik}(t) = \varepsilon_{ik}^{(0)}e^{i\omega t}.$$

В этом случае из (12) следует

$$\sigma_{ik} = K(\omega)\,\varepsilon_{ll}\delta_{ik} + 2\mu(\omega)\left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\varepsilon_{ll}\delta_{ik}\right), \tag{14}$$

где динамические модули $K(\omega)$ и $\mu(\omega)$ определяются соотношениями

$$K(\omega) = \frac{K + i\left(K + \frac{\eta_2}{\tau_2}\right)\omega\tau_2}{1 + i\omega\tau_2}, \tag{15}$$

$$\mu(\omega) = \frac{\mu + i\left(\mu + \frac{\eta_1}{\tau_1}\right)\omega\tau_1}{1 + i\omega\tau_2}. \tag{16}$$

Уравнения движения упругой релаксирующей среды имеют обычный вид

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{17}$$

где $\rho$ — плотность, $u_i$ — составляющие вектора смещения.

Применим изложенную здесь теорию к задаче о распространении вдоль оси $x$ в неограниченной релаксирующей среде поперечной упругой волны. В этом случае

$$u_x = u_z = 0, \quad u_y = Ae^{i(\omega t - kx)},$$

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2}ikAe^{i(\omega t - kx)}, \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0,$$

откуда

$$\sigma_{xy}=2\mu\varepsilon_{xy}=-ik\mu(\omega)Ae^{i(\omega t-kx)}.$$

Подстановка в (17) дает

$$\rho\omega^2=\mu(\omega)k^2,$$

откуда, на основании (16),

$$k^2=\frac{\rho\omega^2}{\mu}\,\frac{1+i\omega\tau_1}{1+i\left(1+\frac{\eta_1}{\mu\tau_1}\right)\omega\tau_1}. \tag{18}$$

Предположив, что $\frac{\eta_1}{\tau_1}\ll\mu$, можно приближенно положить

$$k^2\cong\frac{\rho\omega^2}{\mu}\left(1-i\,\frac{\eta_1}{\mu\tau_1}\,\frac{\omega\tau_1}{1+i\omega\tau_1}\right),$$

или

$$k=\sqrt{\frac{\rho}{\mu}}\,\omega\left[1-\frac{\eta_1}{2\mu\tau_1}\,\frac{\omega^2\tau_1^2}{(1+\omega^2\tau_1^2)}-i\,\frac{\eta_1}{2\mu\tau_1}\,\frac{\omega\tau_1}{(1+\omega^2\tau_1^2)}\right]. \tag{19}$$

Скорость распространения поперечных волн $v_{tr}$ равна

$$v_{tr}=\frac{\omega}{\operatorname{Re}k}=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\left[1+\frac{\eta_1\omega^2\tau_1^2}{2\mu\tau_1(1+\omega^2\tau_1^2)}\right] \tag{20}$$

и представляет монотонную функцию частоты $\omega$, заключенную в пределах

$$v_0\leqslant v_{tr}\leqslant v_\infty, \tag{21}$$

где

$$v_0=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}},\quad v_\infty=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\left(1+\frac{\eta_1}{2\mu\tau_1}\right). \tag{22}$$

Поглощение $\delta$ на длине волны определяется соотношением

$$\delta=2\pi\,\frac{\operatorname{Im}k}{\operatorname{Re}k}=\frac{\pi\eta_1\omega}{\mu(1+\omega^2\tau_1^2)}. \tag{23}$$

Для $\omega\tau_1=1$ получается

$$\delta_{\max}=\frac{\pi\eta_1}{2\mu\tau_1}. \tag{24}$$

Для жидкости $\mu=0$ и (18) перейдет в

$$k^2=\frac{\rho\omega}{\eta_1}(\omega\tau_1-i). \tag{25}$$

Институт металловедения и физики металлов
ЦНИИЧМ

Поступило
28 I 1950

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. И. Френкель, Кинетическая теория жидкостей, АН СССР, 1945. [2] Л. М. Качанов, Механика пластических сред, Л. — М., 1948. [3] Л. И. Мандельштам и М. А. Леонтович, ЖЭТФ, 7, 438 (1937). [4] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М. — Л., 1944.