Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 5

ФИЗИКА

В. С. МИЛИЯНЧУК

ОБ ОДНОЙ ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 13 II 1950)

1. Обобщенные электродинамики получаются обычно путем релятивистско-инвариантного обобщения функции Лагранжа [1]. Возможен однако, другой, не менее общий и интересный подход, сводящийся к следующей задаче [2]: построить электродинамику, дающую в случае покоящегося электрона заданный статический потенциал. Линейные электродинамики с высшими производными дают статический потенциал, зависящий от e^{-ar} [1,3]. Интересно построение электродинамики, дающей в статическом случае потенциалы, зависящие от $e^{-a^2r^2}$. Очевидно, зависимость должна быть такова, чтобы на больших расстояниях от точечного заряда получался потенциал Кулона. Помимо этого требования выбор потенциала произволен, как произволен выбор функции Лагранжа в других обобщениях электродинамики. Существенна, однако, общая форма уравнений поля, а не уравнения поля для какого-либо частного случая.

Возьмем наиболее простой потенциал:

$$\varphi(r) = \frac{e_0}{r}(1 - e^{-a^2r^2}). \tag{1}$$

Обозначим через $F_{\mu\nu}$ тензор смещений, который удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} s_\mu. \tag{2}$$

В линейных электродинамиках можно $F_{\mu\nu}$ выразить через четырехмерный потенциал Φ_μ [2]:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu} \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0. \tag{2a}$$

Таким образом, в линейных электродинамиках тензор смещений удовлетворяет уравнениям Максвелла — Лоренца.

Обозначим, далее, через $f_{\mu\nu}$ тензор напряжений поля, а через φ_μ — соответствующий четырехмерный потенциал. Тогда, принимая статический потенциал в форме (1), получаем:

$$f_{\mu\nu} = F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{\Box}{4a^2}\right) F_{\mu\nu}, \tag{3}$$

где $F\left(1, \frac{1}{2}, z\right)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [5], а $\Box^n$ обозначает n-кратное применение четырехмерного оператора

Лапласа $\Box$. Следовательно, согласно (2), получаем, для тензора напряжений поля уравнения:

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{\Box}{4a^2}\right) s_\mu, \tag{4а}$$

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial f_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0. \tag{4б}$$

Для более сложного, но охватывающего различные формы зависимости потенциала

$$\varphi(r) = \frac{2e_0}{r\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{ar} e^{-t^2}\, dt - are^{-a^2r^2} + 2a^2r^2 \int_{ar}^{\infty} e^{-t^2}\, dt \right) \tag{5}$$

получим уравнения поля:

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} \left[2e^{\frac{\Box}{4a^2}} - F\left(1,\ 2,\ \frac{\Box}{4a^2}\right) \right] s_\mu. \tag{6}$$

Таким образом, в случаях, когда статический потенциал зависит от $e^{-a^2r^2}$, уравнения для тензора напряжений поля получаются из уравнений Максвелла — Лоренца, если „истинный" ток $s_\mu(x)$ заменить „свободным" четырехмерным током $s'_\mu(x)$ типа:

$$s'_\mu(x) = \left(1 + \frac{a_1}{1!} \frac{\Box}{4a^2} + \frac{a_2}{2!} \left(\frac{\Box}{4a^2}\right)^2 + \ldots \right) s_\mu(x). \tag{7}$$

Выражение для „свободного" тока (7) подобно выражению, которое получается для „поляризации вакуума" ([6]). В частности, можно легко подобрать статический потенциал так, чтобы второй и третий члены в (7) совпадали с двумя известными членами выражения для поляризации вакуума ([11]). Если в (7) $a \to \infty$, то $s'_\mu(x) \to s_\mu(x)$ и уравнения поля переходят в уравнения Максвелла — Лоренца.

2. В электродинамике, построенной по общей схеме Ми, принимается два тензора поля: тензор напряжений поля $f_{\mu\nu}$ и тензор смещений $F_{\mu\nu}$, который получается из функции Лагранжа L по известной формуле

$$F_{\mu\nu} = 4\pi \frac{\partial L}{\partial f_{\mu\nu}} \tag{8}$$

и определяется истинным током согласно общим уравнениям:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} s_\mu, \quad \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial f_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0. \tag{9}$$

Функция Лагранжа может быть построена следующим способом:

$$L = -\frac{1}{16\pi} f_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{c} s_\mu \varphi_\mu,$$

причем $F_{\mu\nu}$ должно быть получено из (3). Если этим способом построить функцию Лагранжа, а также обычным способом построить тензор энергии импульса, то в рассмотренных примерах (1) и (5) получается, что электромагнитная масса электрона равна нулю, а для тензора энергии импульса выполняется теорема Лауэ.

В рассматриваемом случае имеется две аналогичные системы: уравнения Максвелла — Лоренца (2) и (3) для тензора смещений и уравнения (4б) и типа (4а) и (6) для тензора напряжений. Эти системы уравнений можно рассматривать независимо друг от друга. В связи с этим можно также формально ввести другую функцию Лагранжа, приводящую непосредственно к уравнениям типа (4a) или (6), если предположить, что электромагнитное поле создается „свободными“ токами и плотностями зарядов (7), а внешнее поле действует на „свободный ток“, и не вводить тензора смещений для вакуума, а рассматривать тензор смещений и уравнения Максвелла только как граничный случай тензора напряжений поля и уравнений для $a \to \infty$, т. е. при переходе к точечному заряду.

3. В связи с произвольностью выбора зависимости статического потенциала от $e^{-a^2 r^2}$ „степенной ряд“ лапласианов в операторе „свободного тока“ (7) произволен. В частности, вместо свободного тока (7) можно в уравнение поля подставить выражение для „поляризации вакуума“. Поэтому целесообразно рассмотрение схемы Ми с точки зрения общих положений теории позитронов. Мы попытаемся сделать из экспериментально и теоретически обоснованного факта возможности возникновения пар в электромагнитном поле некоторые общие выводы, не зависящие от затруднений математической формулировки теории позитронов.

а) „Поляризацией вакуума“ называют возникновение виртуальных пар, что проявляется в возникновении неисчезающей в среднем плотности электрического заряда ([4]). Это, в частности, имеет место в поле Кулона, порождаемом заряженной частицей, и особенно сильно вблизи сингулярности этого поля. В результате виртуального возникновения пар возникает электромагнитное поле, которое изменяет электромагнитное поле, вынуждающее „поляризацию вакуума“ ([6]). Следовательно, измеряемое поле заряженной частицы создается в действительности системой: заряженная частица — виртуальные пары в целом, и только на больших расстояниях от заряженной частицы, где вероятность возникновения виртуальных пар незначительна, совпадает с полем Кулона.

б) Так как вероятность возникновения виртуальных пар очень сильно зависит от градиента напряженности поля ([9]) и будет больше вблизи сингулярности поля частицы, то, естественно, можно предположить, что изменение поля заряженной частицы вследствие поляризации вакуума проходит в направлении уменьшения или устранения сингулярности. Так как поляризация вакуума значительна вблизи заряженной частицы, то изменение поля вблизи частицы во всяком случае будет значительным. Поэтому изменение поля вследствие поляризации вакуума должно быть учтено даже в классическом приближении при экстраполяции классической электродинамики на описание поля заряженной частицы вблизи сингулярности.

в) Наблюдаемое поле заряженной частицы невозможно разделить на поле, созданное „истинной“ частицей, и поле, созданное виртуальными парами. Это разделение невозможно уже потому, что в связи с возможностью возникновения пар принцип суперпозиции действителен только в известном приближении. Особое место с точки зрения теории позитронов принадлежит электрону, так как при наличии незанятых уровней отрицательной энергии существует возможность аннигиляции „истинного“ электрона и возникновения электрона в другом месте ([10]); очевидно, при этом должен сохраниться импульс системы электрон—виртуальные пары в целом. Если учесть эту возможность, то определение положения электрона с точностью большей, чем размеры пространства, в котором проявляется заметная поляризация вакуума, не имеет смысла. Таким образом, нет смысла и, по крайней мере если учесть поляризацию вакуума, нет необходимости по аналогии с диэлектриком вводить для вакуума тензор смещений, характеризующий „истинный“, точечный заряд.

г) Если пренебречь нелинейными эффектами, то взаимодействие между заряженной частицей и внешним электромагнитным полем в первом приближении необходимо также рассматривать как действие внешнего поля на систему заряженная частица — виртуальные пары в целом.

Таким образом, предложение формального способа построения функции Лагранжа физически обосновано с точки зрения общих положений теории позитронов. Изложенное дает возможность построения физически обоснованной модели „протяженного" электрона, свободной от затруднений модели „твердого" протяженного электрона ([8]). Рассматривая электрон как нераздельную систему электрон — поляризация вакуума, приходим к выводу о принципиальной возможности существования возбужденных квантовых состояний этой системы, т. е. существования неустойчивого электрона с различными спинами и различными массами.

4. Чтобы удовлетворить требованиям, следующим из общих положений теории позитронов, примем следующую функцию действия:

$$S = -mc\int\sqrt{-\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\mu}\,ds + \frac{i}{16\pi c}\int f_{\mu\nu}(x)\,f_{\mu\nu}(x)\,d^4x - \\ -\frac{i}{c^2}\int s'_\mu(x)\,\varphi_\mu(x)\,d^4x, \tag{10}$$

где $\varphi_\mu(x)$ — потенциал внешнего поля и собственного поля электрона, x_μ — координаты поля, ξ_μ — координаты электрона, $\dot{\xi}_\mu$ — производные по собственному времени электрона s. Путем варьирования функции действия по электромагнитным потенциалам получаем уравнения поля типа (4) или (6). Для тензора энергии импульса получаем, так же как в теории Максвелла — Лоренца:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} f_{\mu\lambda} f_{\lambda\nu} + \frac{1}{16\pi}\delta_{\mu\nu} f_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}. \tag{11}$$

Как и в теории Максвелла — Лоренца, для тензора энергии импульса (11) не выполняется теорема Лауэ ([1]), и при данном обобщении масса электрона не может быть полностью электромагнитного происхождения. Если предположить, что инертная масса электрона создается другим, неэлектромагнитным полем, то невыполнение теоремы Лауэ окажется не только ясным, но даже необходимым. Действительно, элементарная частица характеризуется не только зарядом, но и полной (инертной и электромагнитной) массой. Невозможно рассматривать электромагнитное поле частицы независимо от поля, создающего инертную массу. Только эти оба поля вместе полностью характеризуют частицу, и поэтому для этих полей вместе взятых можно требовать выполнения теоремы Лауэ. Такое положение следует уже из теории позитронов ([7]).

Для (4) и (7) получается конечная продольная электромагнитная масса. В дальнейшей работе будет показано, что, пользуясь данным здесь обобщением, можно построить релятивистско-инвариантную квантовую электродинамику, удовлетворяющую условию Блоха ([4,8]) и дающую при некоторых видах „свободного" тока (7) конечную также поперечную собственную массу электрона.

Львовский государственный университет
им. И. Франко

Поступило
19 I 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Иваненко и А. Соколов, Классическая теория поля, М. — Л., 1949. [2] F. Bopp, Ann. de Phys., **42**, 573 (1942). [3] Д. Иваненко и А. Соколов, ЖЭТФ, **14**, 379 (1944). [4] Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, М. — Л., 1947. [5] И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, М.—Л., 1948. [6] F. J. Dyson, Phys. Rev., **75**, 486 (1949). [7] В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, М. — Л., 1940. [8] М. А. Марков, ЖЭТФ, **16**, 790 (1946); Усп. физ. наук, **29**, 269 (1946). [9] F. Sauter, Zs. f. Phys., **69**, 742 (1931). [10] R. P. Feynman, Phys. Rev., **75**, 1321 (1949). [11] J. Schwinger, Phys. Rev., **75**, 651 (1949).