Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 3

МАТЕМАТИКА

Р. В. СМИРНОВ

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА p-СОПРЯЖЕННЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 21 I 1950)

Настоящая работа посвящена построению и исследованию p-мерных поверхностей, несущих сеть в n-мерном проективном пространстве, а также построению последовательности Лапласа таких поверхностей.

1. p-сопряженной системой назовем p-мерную поверхность в n-мерном проективном пространстве, на которой можно выбрать p семейств линий (сопряженную сеть), обладающих следующими свойствами: 1) из каждой точки поверхности выходит p линий сети по линейно независимым направлениям (каждая линия принадлежит одному из семейств); 2) касательные к любой линии любого семейства, взятые вдоль любой линии любого другого семейства, образуют двумерную развертывающуюся поверхность.

Выбирая точку A_0 на поверхности, точки $A_1, \ldots, A_p$ — на касательных к p линиям, проходящим через точку A_0 и принадлежащим различным семействам, наконец, беря в качестве точек $A_{p+1}, \ldots, A_n$ любые $n-p$ точек в общем положении вне касательной плоскости, определим подвижной репер, присоединенный к p-сопряженной системе. В этом репере p-сопряженная система определяется следующей системой пфаффовых уравнений:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^j = a_i^j\omega^i + b_i^j\omega^j, \quad \omega_i^\alpha = a_i^\alpha\omega^i, \tag{1}$$

$$i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, p, \quad \alpha = p+1, \ldots, n \quad \text{(не суммировать)}.$$

Система в инволюции и определяет искомую поверхность с произволом $p(p-1)$ функций двух аргументов.

Уравнения (1) показывают, что точка $A_i^k = b_i^k A_0 + A_i$ описывает ребро возврата двумерной развертывающейся поверхности, которая получается при движении касательной к одной из линий семейства ω^i (т. е. линии семейства, определяемого уравнениями $\omega^1 = \ldots = \omega^{i-1} = \omega^{i+1} = \ldots = \omega^n = 0$) вдоль линии семейства ω^k. Точка A_i^k называется фокусом. Всего имеем, таким образом, $p(p-1)$ фокусов. При перемещении точки A_0 по p-сопряженной системе каждая из точек A_i^k описывает поверхность, являющуюся, вообще говоря, p-сопряженной системой. На каждой такой поверхности (будем называть поверхность, описываемую точкой A_i^k, поверхностью A_i^k) естественным образом возникает сеть линий: именно, точка A_i^k описывает линию ω^j, когда точка A_0 смещается также вдоль линии ω^j. Легко показать, что поверхность A_i^k является p-сопряженной системой, а возникающая описанным образом сеть является сопряженной сетью. Поверхности A_i^k являются преобразованиями Лапласа от поверхности A_0. Так как поверхности

A_l^k суть p-сопряженные системы, то можно построить их преобразования Лапласа и так получить целую последовательность Лапласа p-сопряженной системы.

При построении последовательности Лапласа возникают интересные переплетения между поверхностями последовательности: касательные к линиям ω^l в точке A_i^k $(l \neq i, k)$ пересекают ребра репера A_0A_l $(l=1, \ldots, p)$ в фокусах A_l^k. Но точки A_l^k являются фокусами и для поверхности A_l^k (двухкратные фокусы). Таким образом, второе преобразование Лапласа имеет уже поверхности, общие с поверхностями первого преобразования.

Из каждой точки A_i^k выходит одна касательная, именно касательная к линии ω^i, которая не пересекает ни одного из лучей A_0A $(l=1, \ldots, p, l \neq i)$. Таким образом возникают p-эдры: $[A_0 A_{i_1}^j A_{i_2}^j \ldots A_{i_{p-1}}^j]$ $(i_1, i_2, \ldots, i_{p-1} = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, p;\ j=1, \ldots, p)$. Эти p-эдры совершенно аналогичны звеньям двумерной последовательности Лапласа. Касательные к линиям ω^i в каждой из точек A_i^k $(k=1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, p)$ пересекаются между собой также в фокусах поверхностей A_l^k $(k=1, \ldots, i-1,\ i+1, \ldots, p)$. Исходя из этого, можно представить себе и дальнейший ход последовательности Лапласа. При этом вследствие указанных переплетений при s-м преобразовании Лапласа p-сопряженной системы получим следующее число новых p-сопряженных систем:

$$N(s,p) = \sum_{l=0}^{s-1} \binom{s-1}{l} \binom{p}{l+1} \sum_{k=p}^{s-1} \binom{s-1}{k} \binom{p-l-1}{s-k}, \quad \text{где } \binom{k}{0} = \binom{k}{k} = 1.$$

Если последовательно q раз применить преобразование Лапласа, то получаются q-кратные фокусы, т. е. такие фокусы, которые являются одновременно фокусами для q различных преобразований Лапласа. При этом наибольшая возможная кратность фокусов для p-сопряженной системы есть $p-1$. Такие фокусы появляются при $p-1$-кратном последовательном применении преобразования Лапласа.

2. Отыщем на каждом луче A_0A_i $(i=1, \ldots, p)$ точку $B_i = \nu_i A_0 + A_i$ и потребуем, чтобы

$$[dB_iB_iB_j] \equiv 0 \mod (\omega^1, \ldots, \omega^{j-1}, \omega^{j+1}, \ldots, \omega^p).$$

Это приводит к следующей системе пфаффовых уравнений для нахождения неизвестных функций ν_i:

$$\left[d\nu_i + \nu_i (\omega_0^0 - \omega_i^i) + \omega_i^0 - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{p} \nu_l (\nu_i + b_i^l)\, \omega^l, \omega^j \right] = 0,$$

$$i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, p \quad (\text{по } i \text{ не суммировать}).$$

Система в инволюции и решение зависит от p функций одного аргумента. Таким образом, на каждом луче найдутся точки B_i с произволом p функций одного аргумента. Каждая точка B_i описывает p-сопряженную систему, причем сопряженной сетью является естественным образом возникающая сеть. Из всех касательных к линиям сети в точке B_i только одна, именно касательная к линии ω^i, не пересекает ни одного из ребер репера A_0A_i $(i=1, \ldots, p)$. В то же время эта касательная пересекает все касательные к линиям ω^i, проходящим через фокусы A_i^k $(k \neq i,\ k=1, \ldots, p)$, в таких точках, которые, в свою очередь, являются фокусами для p-сопряженной системы B_i, а для p-сопряженных систем $A_1^i, A_2^i, \ldots, A_{i-1}^i, A_{i+1}^i, \ldots, A_p^i$

эти точки играют такую же роль, какую точки B_i ($i = 1, \dots, p$) играют для сопряженной системы A_0. Таким образом, в каждую из p-сопряженных систем A_i^k ($k \neq i$, $k = 1, \dots, p$) оказывается вписанным некоторый $(p-1)$-эдр, вершины которого являются фокусами p-сопряженной системы B_i: $B_1^k, \dots, B_{k-1}^k, B_{k+1}^k, \dots, B_p^k$ ($k \neq i$, $k = 1, \dots, p$). Этот $(p-1)$-эдр играет для p-сопряженной системы A_i^k такую же роль, какую $(p-1)$-эдр $[B_1 \dots B_p]$ играет для p-сопряженной системы A_0.

3. Пусть дана p-сопряженная система S_p. Полагая $\omega^{q+1} = \dots = \omega^p = 0$, выделим из p-сопряженной системы S_p q-сопряженную систему S_q. В каждой точке q-сопряженной системы S_q построим $p-q$ прямых, касательных к линиям $\omega^{q+1}, \dots, \omega^p$. Эти прямые определят в каждой точке q-сопряженной системы S_q $(p-q)$-мерную плоскость. Таким образом получим p-мерную поверхность с $(p-q)$-мерными плоскими образующими. Касательная плоскость построенной q-мерной поверхности вдоль такой плоской образующей постоянна. Среди определенных таким образом поверхностей находятся поверхности, рассматривавшиеся Картаном ([1]).

Если теперь брать только ту часть преобразования Лапласа от p-сопряженной системы S_p, у которой касательные к линиям $\omega^{q+1}, \dots$ $\dots, \omega^p$ пересекают ребра репера $A_0A_{q+1}, \dots, A_0A_p$, а при дальнейшем построении последовательности рассматривать только касательные к $\omega^{q+1}, \dots, \omega^p$, то в зависимости от того, будет ли $p \geqslant 2q$ или $p < 2q$, мы после q-кратного последовательного преобразования Лапласа или получим q-кратные (в определенном выше смысле) точки или нет.

В случае, когда $p \geqslant 2q$, т. е. когда q-кратные точки существуют, получим q-сопряженную систему $\bar{S}_q$, описываемую этой q-кратной точкой при перемещении точки A_0 по q-сопряженной системе S_q. Возникающая при этом сеть на системе $\bar{S}_q$ является сопряженной сетью: $\omega^1, \dots, \omega^q$. Эта поверхность $\bar{S}_q$ играет для нашей p-мерной поверхности с $(p-q)$-мерными плоскими образующими такую же роль, как ребро возврата двумерной развертывающейся поверхности.

Случай $p < 2q$ отличается от только что рассмотренного тем, что вместо одной поверхности $\bar{S}_q$ имеется несколько поверхностей $\bar{S}_{q_i}$ ($q_i < q$).

4. В заключение следует упомянуть две относящиеся сюда работы. Это, во-первых, работа Т. Л. Козьминой ([2]). В этой работе рассматривается трижды сопряженная система в трехмерном проективном пространстве. Во-вторых, работа Черна ([3]), посвященная возможности обобщения преобразования Лапласа. При этом Черн исходит из поверхностей, рассмотренных Картаном ([1]), которые характеризуются тем, что их асимптотическая сеть состоит из p двойных p-мерных плоскостей. Соприкасающаяся плоскость такой поверхности $2p$-мерна. Легко видеть, что в эту схему не укладываются p-сопряженные системы в пространстве, число измерений которого меньше $2p$. В частности, это имеет место для двумерных поверхностей в трехмерном проективном пространстве, а также и для исследовавшейся Козьминой трижды-сопряженной системы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 X 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Cartan, Bull. Soc. Math. France, **47**, 125 (1919); 48, 142 (1920). [2] Т. Л. Козьмина, ДАН, **55**, № 3 (1947). [3] S. Chern, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **30** (1944).