Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 3

МАТЕМАТИКА

Я. Б. ЛОПАТИНСКИЙ

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 23 I 1950)

Рассматривается система уравнений вида

$$\sum_{l=1}^{p} A_{kl} u_l = 0 \quad (k = 1, \ldots, p); \tag{1}$$

здесь $A_{kl} = \sum_{j_1, \ldots, j_n} f^{kl}_{j_1, \ldots, j_n} \frac{\partial^{j_1 + \ldots + j_n}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}$, $f^{kl}_{j_1, \ldots, j_n}$ суть действительные функции действительных аргументов $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$, определенные в области D и непрерывно дифференцируемые в этой области $j_1 + \ldots + j_n$ раз, соответственно. Пусть порядок оператора A_{kl} равен s_{kl}, $s_l = \max_k s_{kl}$.

Система (1) предполагается системой эллиптического типа в области D; это означает, что

$$\left| \sum_{j_1 + \ldots + j_n = s_l} f^{kl}_{j_1, \ldots, j_n} \alpha_1^{j_1} \ldots \alpha_n^{j_n} \right| \neq 0, \tag{2}$$

если $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — действительные числа, $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$. Пусть A' обозначает оператор, сопряженный оператору A:

$$A'_{kl} u = \sum_{j_1, \ldots, j_n} (-1)^{j_1 + \ldots + j_n} \frac{\partial^{j_1 + \ldots + j_n} (f^{kl}_{j_1, \ldots, j_n} u)}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}}.$$

$B^j_{kl}(u, v)$ — билинейные дифференциальные формы, удовлетворяющие условию:

$$u A'_{kl} v - v A_{kl} u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} B^j_{kl}(u, v).$$

Совокупность столбцов функциональной матрицы

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11}(x, y) & \ldots & \varphi_{1p}(x, y) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{p1}(x, y) & \ldots & \varphi_{pp}(x, y) \end{pmatrix} \tag{3}$$

будет определять фундаментальную систему решений системы (1) в точке $y \in D$, если выполняются условия: при $x \in D$, $x \neq y$ каждая функция $\varphi_{kl}(x, y)$ непрерывно дифференцируема по $x_1, \ldots, x_n$ s_l раз, причем

$$\sum_{m=1}^{p} A_{km}\, \varphi_{ml} = 0 \quad (k,\ l = 1,\ \ldots,\ p);$$

для всякой системы функций $u_k = u_k(x)$ $(k = 1, \ldots, p)$, непрерывно дифференцируемых в некоторой окрестности $V \subseteq D$ точки y, соответственно, $\max\limits_{l} s_{kl}$ раз, имеют место соотношения:

$$u_k(y) = -\lim_{\rho \to 0} \int \ldots (n-1) \ldots \int_{S_\rho} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\rho} \sum_{l,\, m=1}^{p} B_{lm}^{j}(\varphi_{mk}, u_l)\, dS_x \quad (k = 1, \ldots, p).$$

Здесь S_ρ означает сферу радиуса ρ с центром в точке y. При выполнении этих условий для всякой допустимой области* $D' \subset V$ с границей $S' \subset V$ имеют место легко получаемые соотношения

$$u_k(y) = \int \ldots (n-1) \ldots \int_{S'} \sum_{j=1}^{n} \cos(\nu,\ x_j) \sum_{l,m=1}^{p} B_{lm}^{j}(\varphi_{mk},\ u_l)\, dS_x +$$

$$+ \int \ldots (n) \ldots \int_{D'} \sum_{l,m=1}^{p} \varphi_{lk} A'_{ml}\, u_m dD_x \quad (k = 1,\ \ldots,\ p);$$

здесь ν — направление внутренней нормали к S' в точке x.

Теорема 1. *Если коэффициенты операторов A_{kl} в системе* (1) *эллиптического типа непрерывно дифференцируемы $\sum\limits_{l=1}^{p} s_l$ раз, то система* (1) *обладает фундаментальной системой решений в каждой точке $y \in D$.*

Теорема 1 для случая двух аргументов (с лишними ограничениями) была доказана Э. Э. Леви (2). В общем случае эта теорема может быть доказана тем же методом, основываясь на выражении фундаментального решения уравнения

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) u = 0, \tag{4}$$

где $f(\alpha) = f(\alpha_1, \ \ldots,\ \alpha_n)$ есть определенная форма переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ степени s (с коэффициентами, не зависящими от $x_1, \ldots, x_n$).

Далее используются обозначения: $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $t = (t_1,\ \ldots,\ t_n)$ (x_k, t_k — комплексные числа), $(x,\ t) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k t_k$, $|x| = +\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2}$.

Теорема 2. *Фундаментальное решение $\varphi(x, y)$ уравнения* (4) *в точке y определяется (при $x \neq y$) формулами:*

$$\varphi(x,\ y) = \varphi(x - y,\ 0),$$

$$\varphi(x,\ 0) = \int \ldots (n) \ldots \int_{S(x)} \frac{\Phi(x,\ \alpha)}{f(\alpha)}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_n, \tag{5}$$

---

* Определение допустимой области см. (1), стр. 57.

$$\Phi(x, \alpha) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2(2\pi i)^{n+1}(s-n)!}(x, \alpha)^{s-n} \lg\left\{-\dfrac{(x, \alpha)^2}{(\alpha, \alpha)}\right\} & (s \geqslant n), \\ \dfrac{(-1)^n (n-s-1)!}{2(\pi i)^{n+1}}(x, \alpha)^{s-n} & (s < n). \end{cases} \tag{6}$$

Формулы (5), (6) нуждаются в пояснениях. Пусть в комплексной z-плоскости C есть единичная положительно ориентированная окружность, L — прямая, определенная уравнением $\operatorname{Im} z = \varepsilon$ (определение ε указывается далее) и ориентированная в направлении возрастания $\operatorname{Re} z$. Пусть n-мерное действительное пространство точек $t = (t_1, \ldots, t_n)$ ориентировано указанным расположением координат; полупространство $(x, t) > 0$ ориентировано согласованно, его граница $(x, t) = 0$ имеет индуцированную ориентацию; шар в этой плоскости, определенный формулами $(x, t) = 0$, $|t| < 1$, имеет согласованную ориентацию, его граница $T(x)$, $(x, t) = 0$, $|t| = 1$, имеет индуцированную ориентацию.

Поверхность $S(x) = S_\varepsilon(x)$ в комплексном пространстве точек $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ определяется формулой

$$\alpha = \gamma(\beta x + t),$$

где β, γ, t пробегают, соответственно, L, C, $T(x)$; ориентация $S(x)$ определяется ориентацией декартова произведения $L \times C \times T(x)$, порожденной указанными ориентациями L, C, $T(x)$.

Число ε, указанное выше, определяется условиями: $0 < \varepsilon < 1/|x|$; $f(\alpha) \neq 0$ на $S_\eta(x)$ для всех действительных значений η таких, что $|\eta| \leqslant \varepsilon$.

Легко показать, что функция $\lg\left\{-\dfrac{(x, \alpha)^2}{(\alpha, \alpha)}\right\}$ не имеет особенностей на $S_\varepsilon(x)$. Значение этой функции однозначно определяется аналитическим продолжением на $S_\varepsilon(x)$ и требованием действительности в точке $i\varepsilon x + t_0$ (t_0 — некоторая точка $T(x)$). Из формул (5), (6) можно получить также простое выражение фундаментальной системы решений для системы (1) в предположении, что операторы A_{kl} $(k, l = 1, \ldots, p)$ являются однородными (относительно порядка содержащихся дифференцирований) операторами одинакового порядка, с постоянными коэффициентами.

Именно, пусть

$$A_{kl} = f_{kl}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

где $f_{kl}(\alpha) = f_{kl}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $(k, l = 1, \ldots, p)$ суть формы степени s, $f(\alpha)$ — определитель матрицы $(f_{kl}(\alpha))^p$, $f^{kl}(\alpha)$ — алгебраическое дополнение элемента $f_{kl}(\alpha)$ в этой матрице. Тогда фундаментальная система решений системы (1) определяется формулами:

$$\varphi_{kl}(x, y) = \varphi_{kl}(x - y, 0),$$

$$\varphi_{kl}(x, 0) = f^{lk}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varphi(x, 0),$$

где $\varphi(x, 0)$ определяется формулой (5).

В частном случае операторов A_{kl} первого порядка и трех аргументов фундаментальная система решений была получена другим методом З. Я. Шапиро (3).

Поступило
21 I 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, М., 1947. [2] Э. Э. Леви, Усп. матем. наук, 8, 449 (1941). [3] З. Я. Шапиро, ДАН, 46, № 4 (1945).