**Доклады Академии Наук СССР**
**1950. Том LXXI, № 5**

АСТРОНОМИЯ

Г. Ф. ХИЛЬМИ

# ДИССИПАТИВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В СИСТЕМЕ $n$ ТЕЛ, ПРИТЯГИВАЮЩИХСЯ ПО ЗАКОНУ НЬЮТОНА

*(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 1 II 1950)*

1. При совместной работе с акад. О. Ю. Шмидтом над теорией захвата, освещение которой с разных сторон можно найти в работах ([1-4]), мной были изучены важные частные типы движений в проблеме трех тел. В даленейшем эти результаты удалось усилить и обобщить на случай любого числа тел. В этой заметке излагается та часть исследований, которая относится к явлениям диссипации.

2. Пусть $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ — материальные точки, притягивающиеся по закону Ньютона, массы которых обозначим через $m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}$. Расстояние между точками $P_i$ и $P_j$ обозначим через $r_{ij}$. Движение этой динамической системы будем описывать в координатах Якоби. Пусть $x_1, y_1, z_1$ — координаты точки $P_1$ относительно осей с началом в точке $P_0$; $x_2, y_2, z_2$ — координаты точки $P_2$ относительно осей с началом в центре тяжести точек $P_0$ и $P_1$ и т. д. и, наконец $x_{n-1}$, $y_{n-1}$, $z_{n-1}$ — координаты точки $P_{n-1}$ относительно осей с началом в центре тяжести точек $P_0, P_1, \ldots, P_{n-2}$.

Система координат во всех случаях предполагается прямоугольной, а оси параллельными. Известно, что уравнения движения в таких координатах имеют вид:

$$\mu_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad \mu_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad \mu_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z_i} \tag{1}$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где

$$\mu_i = \frac{(m_0 + m_1 + \ldots + m_{i-1})\, m_i}{m_0 + m_1 + \ldots + m_i}, \quad V = \sum_{ij} \frac{m_i m_j}{r_{ij}},$$

причем единицы измерения предполагаются такими, при которых постоянная тяготения равна единице.

3. Примем обозначения

$$M_i' = \sum_{j \neq i} m_i m_j, \quad M_i'' = \min_{j \neq i} \left\{ \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \right\}, \quad M_i = \frac{M_i'}{M_i''},$$

и, кроме того, для каждого $i$ введем функции

$$\rho_i(t) = \min\{r_{ij}\}, \quad \sigma_i(t) = \min\left\{\frac{dr_{ij}}{dt}\right\} \quad (j \neq i).$$

Прежде всего рассмотрим движение точки $P_1$ по отношению к точке $P_0$. Дважды дифференцируя тождество $r_{01}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$, получим:

$$r_{01}r_{01}'' + r_{01}'^2 = x_1x_1'' + y_1y_1'' + z_1z_1'' + x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2,$$

а из этого тождества легко получить неравенство

$$r_{01}r_{01}'' \geqslant xx_1'' + y_1y_1'' + z_1z_1''.$$

Пользуясь уравнениями (1), перепишем это неравенство так:

$$r_{01}r_{01}'' \geqslant \frac{1}{\mu_1}\left(x_1\frac{\partial V}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial V}{\partial y_1} + z_1\frac{\partial V}{\partial z_1}\right).$$

Обозначим через $l$ направление прямой, соединяющей точку $P_0$ с точкой $P_1$. Тогда последнее неравенство можно записать в следующем виде:

$$r_{01}'' \geqslant \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial V}{\partial l}. \tag{2}$$

Дифференцируя потенциальную функцию $V$ по направлению $l$ и принимая во внимание, что при этом $r_{ij}$ изменяются только для расстояний между $P_1$ и остальными точками системы, найдем

$$\frac{\partial V}{\partial l} = -\sum_{i \neq 1}\frac{m_1 m_i}{r_{1i}^2}\frac{\partial r_{1i}}{l}.$$

Из простых геометрических соображений следует, что

$$\left|\frac{\partial r_{1i}}{\partial l}\right| \leqslant 1,$$

поэтому

$$\frac{\partial V}{\partial l} \geqslant -\sum_{i \neq 1}\frac{m_1 m_i}{r_{1i}^2},$$

а тогда неравенство (2) принимает вид

$$r_{01}'' \geqslant -\frac{1}{\mu_1}\sum_{i \neq 1}\frac{m_1 m_i}{r_{1i}^2}.$$

Принимая во внимание, что в каждый момент времени $r_{1i} \geqslant \rho_1$, и учитывая указанные выше значения $\mu_1$ и $M_1$, получим

$$r_{01}'' \geqslant -\frac{M_1}{\rho_1^2}. \tag{3}$$

Интегрируя это неравенство по времени в пределах от 0 до $t > 0$, найдем

$$r_{01}'(t) \geqslant r_{01}'(0) - \int_0^t \frac{M_i}{\rho_i^2}\,dt.$$

Мы получили это неравенство, рассматривая движение точки $P_1$ относительно $P_0$. Но мы можем рассматривать движение любой точки $P_i$ относительно любой точки $P_j$; поэтому справедлива следующая система неравенств:

$$r_{ij}'(t) \geqslant r_{ij}'(0) - \int_0^t \frac{M_i}{\rho_i^2}\,dt. \tag{4}$$

Проинтегрировав эти неравенства по времени от 0 до $t>0$, получим:

$$r_{ij}(t) \geqslant r_{ij}(0) + r'_{ij}(0)\, t - \int_0^t \int_0^t \frac{M_i}{\rho_i^2}\, dt\, dt,$$

а отсюда следует также, что

$$\rho_i(t) \geqslant \rho_i(0) + \sigma_i(0)\, t - \int_0^t \int_0^t \frac{M_i}{\rho_i^2}\, dt\, dt. \tag{5}$$

4. Рассмотрим движение какого-нибудь определенного из тел, например $P_1$.

Теорема. *Если для тела $P_1$, движущегося в системе $n$ гравитирующих тел, выполняются условия*

$$\sigma_1(0) > 0, \qquad \sigma_1^2(0) > \frac{8M_1}{\rho_1(0)} \tag{6}$$

*и при всех $t>0$ не происходит соударений тел, то $\rho_1(t)\to\infty$ при $t\to+\infty$, т. е. расстояния тела $P_1$ от каждого из остальных тел системы неограниченно возрастают.*

Выше показано, что при всяком движении тела $P_1$ выполняется интегральное неравенство

$$\rho_1(t) \geqslant \rho_1(0) + \sigma_1(0)\, t - \int_0^t \int_0^t \frac{M_1}{\rho_1^2}\, dt\, dt. \tag{7}$$

Наша задача состоит в изучении функции $\rho_1(t)$, удовлетворяющей интегральному неравенству (7) и условиям (6).

Из (6) имеем

$$\frac{\sigma_1(0)}{2} - \frac{4M_1}{\rho_1(0)\,\sigma_1(0)} > 0,$$

а тогда при всяком $t>0$

$$\frac{\rho_1(0)}{2} + \frac{\sigma_1(0)}{2}\, t - \frac{4M_1}{\rho_1(0)\,\sigma_1(0)}\, t + \frac{4M_1}{\sigma_1^2(0)} \ln\left(1 + \frac{\sigma_1(0)}{\rho_1(0)}\, t\right) > 0. \tag{8}$$

Принимая во внимание, что

$$\int_0^t \int_0^t \frac{M_1 dt\, dt}{\left(\frac{\rho_1(0)}{2} + \frac{\sigma_1(0)}{2}\, t\right)^2} = \frac{4M_1}{\rho_1(0)\,\sigma_1(0)}\, t - \frac{4M_1}{\sigma_1^2(0)} \ln\left(1 + \frac{\sigma_1(0)}{\rho_1(0)}\, t\right),$$

мы можем неравенство (8) представить в виде

$$\frac{\rho_1(0)}{2} + \frac{\sigma_1(0)}{2}\, t - \int_0^t \int_0^t \frac{M_1\, dt\, dt}{\left(\frac{\rho_1(0)}{2} + \frac{\sigma_1(0)}{2}\, t\right)^2} > 0. \tag{9}$$

Так как $\rho_1(0)>0$, то по крайней мере для достаточно малых значений $t$ выполняется неравенство

$$\rho_1(t) > \frac{\rho_1(0)}{2} + \frac{\sigma_1(0)}{2}\, t. \tag{10}$$

Момент времени $t$ назовем регулярным, если при всех $t'$, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant t' \leqslant t$, выполняется условие (10). Обозначим через $Q$ множество всех регулярных моментов времени. Пусть

$\tau = \sup Q$, если множество $Q$ ограничено, и пусть $\tau = \infty$ в противном случае. Допустим, что $\tau$ имеет конечное значение; тогда

$$\rho_1(t) \geqslant \frac{\rho_1(0)}{2} + \frac{\sigma_1(0)}{2} t, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant t < \tau; \tag{11}$$

$$\rho_1(\tau) = \frac{\rho_1(0)}{2} + \frac{\sigma_1(0)}{2} \tau. \tag{12}$$

С другой стороны, в силу неравенства (9) имеем

$$\frac{\rho_1(0)}{2} + \frac{\sigma_1(0)}{2} \tau - \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{M_1 dt\, dt}{\left(\frac{\rho_1(0)}{2} + \frac{\sigma_1(0)}{2} t\right)^2} > 0, \tag{13}$$

а тогда из неравенств (11), (12) и (13) следует

$$\frac{\rho_1(0)}{2} + \frac{\sigma_1(0)}{2} \tau - \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{M_1}{\rho_1^2} dt\, dt > 0. \tag{14}$$

Написав неравенство (7) в виде

$$\rho_1(t) \geqslant \frac{\rho_1(0)}{2} + \frac{\sigma_1(0)}{2} t + \left\{\frac{\rho_1(0)}{2} + \frac{\sigma_1(0)}{2} t - \int_0^t \int_0^t \frac{M_1}{\rho_1^2} dt\, dt\right\}$$

и рассматривая его для момента $\tau$, мы из него и неравенства (14) получим

$$\rho_1(\tau) > \frac{\rho_1(0)}{2} + \frac{\sigma_1(0)}{2} \tau.$$

Но это противоречит равенству (11) и, следовательно, $\tau = \infty$. А тогда при всех $t > 0$ выполняется неравенство (10) и $\rho_1(t) \to \infty$ при $t \to +\infty$. Теорема доказана.

Следствие. *Если условия типа* (6) *выполняются для каждого из тел* $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$, *то каждое из расстояний* $r_{ij}$ *неограниченно возрастает со временем и происходит полный разлет всех тел системы.*

В этом случае систему естественно назвать „вполне диссипативной“.

Геофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
1 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. Ю. Шмидт, ДАН, 58, № 2 (1947). [2] О. Ю. Шмидт и Г. Ф. Хильми, Усп. матем. наук, 3, в. 4 (26), 157 (1948). [3] Г. Ф. Хильми, ДАН, 68, № 1 (1948). [4] О. Ю. Шмидт, Четыре лекции о теории происхождения Земли, 1949.