Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 3

МАТЕМАТИКА

М. М. ДЖРБАШЯН

О ПОЛНОТЕ ОДНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЦЕЛЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 I 1950)

В настоящей заметке мы приводим одну простую ортогональную систему целых периодических функций и доказываем ее полноту.

1°. Отнесем к классу $H_2(e^{-2\sigma r^2})$ $(\sigma > 0)$ все целые функции $f(z)$, для которых существует интеграл

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-2\sigma r^2} |f(re^{i\vartheta})|^2 r\,dr\,d\vartheta. \tag{1}$$

Доказано [1], что если $f(z) \in H_2(e^{-2\sigma r^2})$, то имеет место следующее интегральное представление:

$$f(z) = \frac{2\sigma}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-2\sigma r^2} f(re^{i\vartheta}) e^{2\sigma z r e^{-i\vartheta}} r\,dr\,d\vartheta \quad \text{при} \quad |z| < \infty. \tag{2}$$

Для любых чисел $\sigma > 0$ и $\omega > 0$ определим последовательность

$$L_n(z) = \frac{2\sigma}{\pi} \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{\pi}{\omega} z} - e^{\frac{\pi^2}{2\sigma\omega^2} k} \right) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Лемма 1. *Система функций*

$$\Phi_0(z) = \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi}}, \quad \Phi_n(z) = \frac{L_n(z)}{\sqrt{L_n\left(\frac{\pi}{2\sigma\omega} n\right)}} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

ортогональна и нормальна на всей плоскости в следующем смысле:

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-2\sigma r^2} \Phi_n(re^{i\vartheta}) \overline{\Phi_m(re^{i\vartheta})} r\,dr\,d\vartheta = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad m \neq n, \\ 1 & \textit{при} \quad m = n. \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Функции $\Phi_n(z) \in H_2(e^{-2\sigma r^2})$ и, по формуле (2), для любого $n \geq 1$

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-2\sigma r^2} \Phi_n(re^{i\vartheta}) e^{k\frac{\pi}{\omega} re^{-i\vartheta}} r\,dr\,d\vartheta = \Phi_n\left(\frac{\pi}{2\sigma\omega} k\right) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{4^1}$$

а это эквивалентно первому из условий (4). В силу (4^1) и (2):

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-2\sigma r^2} |\Phi_n(re^{i\vartheta})|^2 r\,dr\,d\vartheta =$$

$$= L_n^{-1/2}\left(\frac{\pi}{2\omega\sigma} n\right)\frac{2\sigma}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-2\sigma r^2}\Phi_n(re^{i\vartheta})\, e^{n\frac{\pi}{\omega} re^{-i\vartheta}}\, r\,dr\,d\vartheta =$$

$$= L_n^{-1/2}\left(\frac{\pi}{2\omega\sigma} n\right)\Phi_n\left(\frac{\pi}{2\omega\sigma} n\right) = 1,$$

и второе из условий (4) также доказано.

2°. Приводим критерий единственности аналитических функций в полуплоскости, при этом опираемся на следующую теорему Карлемана [2].

Если $F(z)$ $(z = x + iy)$ голоморфна в полуплоскости $x \geqslant 0$, а $\{z_n\}$ означает последовательность ее нулей, то

$$\sum_{|2n| \leqslant R}\left(\frac{1}{|z_n|} - \frac{|z_n|}{R^2}\right)\cos\arg z_n \leqslant \frac{1}{\pi R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\log|F(Re^{i\vartheta})|\cos\vartheta\, d\vartheta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_1^R\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{R^2}\right)\log|F(iy)F(-iy)|\,dy + \chi(R), \qquad (5)$$

где $\chi(R) = O(1)$ при $R \to \infty$.

Лемма 2. *Пусть функция $F(z)$ голоморфна в полуплоскости $x \geqslant 0$ и удовлетворяет условиям:* 1) $|F(z)| < Ae^{\sigma x^2}$ $(\sigma > 0)$; 2) $F(\gamma n + 2\omega i m) = 0$ $(\gamma > 0,\ \omega > 0)$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$. *Тогда при* $\gamma < \frac{3\pi}{4\omega\sigma}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right)$ *будем иметь* $F(z) \equiv 0$.

Доказательство. Пусть в условиях теоремы $F(z) \neq 0$, тогда, в силу условия (2), левая часть формулы (5) представится в виде

$$J(R) = 2\sum_{n=1}^{[\gamma^{-1}R]}\sum_{m=0}^{n(R)}\left\{\frac{\gamma n}{\gamma^2 n^2 + 4\omega^2 m^2} - \frac{\gamma n}{R^2}\right\}, \text{ где } n(R) = \left[\frac{1}{2\omega}\sqrt{R^2 - n^2\gamma^2}\right]. \qquad (6)$$

Полагая, что $\gamma^{-1}R$ принимает целые значения, имеем:

$$J_1(R) = \sum_{n=1}^{\gamma^{-1}R}\sum_{m=0}^{n(R)}\frac{\gamma n}{\gamma^2 n^2 + 4\omega^2 m^2} > \sum_{n=1}^{\gamma^{-1}R}\gamma n\int_0^{n(R)+1}\frac{dx}{\gamma^2 n^2 + 4\omega^2 x^2} >$$

$$> \frac{1}{2\omega}\sum_{n=1}^{\gamma^{-1}R}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\left(\frac{n}{\gamma^{-1}R}\right)^{-2} - 1}.$$

Следовательно,

$$\varliminf_{R\to\infty}\frac{1}{R}J_1(R) \geqslant \frac{1}{2\omega\gamma}\int_0^1\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\,dx = \frac{\pi}{4\omega\gamma}. \qquad (7)$$

Далее имеем

$$J_2(R) = \sum_{n=1}^{\gamma^{-1}R}\sum_{m=0}^{n(R)}\frac{\gamma n}{R^2} = \sum_{n=1}^{\gamma^{-1}R}\frac{\gamma n\{n(R) + 1\}}{R^2} <$$

$$< \frac{R}{2\omega\gamma} \frac{1}{R\gamma^{-1}} \sum_{n=1}^{R\gamma^{-1}} \left(\frac{n}{R\gamma^{-1}}\right) \left\{ \sqrt{1-\left(\frac{n}{R\gamma^{-1}}\right)^2} + \frac{2\omega}{R} \right\},$$

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{1}{R} J_2(R) \leqslant \frac{1}{2\omega\gamma} \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{6\omega\gamma}. \tag{8}$$

Из (6), (7) и (8) имеем

$$\underline{\lim_{R\to\infty}} \frac{1}{R} J(R) \geqslant \frac{1}{\omega\gamma}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right). \tag{9}$$

Из условия 1) леммы следует, что при $R \to \infty$

$$\frac{1}{2\pi} \int_1^R \log|F(iy)F(-iy)| \frac{dy}{y^2} = O(1), \tag{10}$$

$$\frac{1}{R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \log|F(Re^{i\vartheta})| \cos\vartheta\, d\vartheta < \left(\frac{4\sigma}{3\pi} + \varepsilon'\right) R \quad (\varepsilon' > 0).$$

Имея в виду оценки (10), разделим формулу (5), написанную для функции $F(z)$, на R и перейдем к пределу при $R \to \infty$; тогда в силу (9) получим неравенство

$$\frac{1}{\omega\gamma}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right) \leqslant \frac{4\sigma}{3\pi} + \varepsilon'.$$

Но $\varepsilon' > 0$ произвольно, и мы получили неравенство $\gamma \geqslant \frac{3\pi}{4\omega\sigma}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right)$, что противоречит условию леммы. Таким образом, $F(z) \equiv 0$.

Следствие. В условиях 1) и 2) леммы 2, если $\gamma \leqslant \pi/2\omega\sigma$, будем иметь $F(z) \equiv 0$.

3°. Опираясь на предыдущие результаты, докажем теорему 1.

Теорема 1. *Любая целая периодическая функция $f(z)$ периода $2\omega i$ $(\omega > 0)$, принадлежащая к классу $H_2(e^{-2\sigma r^2})$, разлагается в равномерно сходящийся в любой конечной части плоскости ряд Фурье по ортогональным функциям $\{\Phi_n(z)\}$:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \Phi_n(z), \quad A_n = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-2\sigma r^2} f(re^{i\vartheta}) \overline{\Phi_n(re^{i\vartheta})}\, r\, dr\, d\vartheta. \tag{11}$$

Коэффициенты разложения (11) *определяются также из следующих рекуррентных формул:*

$$f\left(\frac{\pi}{2\omega\sigma} n\right) = A_0\Phi_0\left(\frac{\pi}{2\omega\sigma} n\right) + A_1\Phi_1\left(\frac{\pi}{2\omega\sigma} n\right) + \ldots + A_n\Phi_n\left(\frac{\pi}{2\omega\sigma} n\right)$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Доказательство. Можно показать ([1]), что всякая функция $f(z) \in H_2(e^{-2\sigma r^2})$ является целой функцией порядка $\leqslant 2$ типа $\leqslant \sigma$. Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$, при надлежащем выборе числа $A > 0$, имеет место неравенство

$$|f(z)| < Ae^{(\sigma+\varepsilon)r^2}, \quad |z| < \infty. \tag{13}$$

Но условие периодичности функции позволяет улучшить оценку (13). Действительно, пусть $z = x + iy = re^{i\vartheta}$ — любая точка плоскости. Пусть $y > 2\omega$ и целое число N определяется из условия $N2\omega \leqslant y < (N+1)\,2\omega$; тогда имеем

$$|f(x+iy)| = |f[x+(y-2\omega N)i]| \leqslant$$
$$\leqslant A \exp\{(\sigma+\varepsilon)[x^2+(y-2\omega N)^2]\} < A_1 \exp\{(\sigma+\varepsilon) r^2 \cos^2 \vartheta\}. \qquad (14)$$

Очевидно, что оценка (14) верна при $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, $r \geqslant 0$ при надлежащем выборе числа A_1.

Из ортогональности функций $\{\Phi_n(z)\}$ по теореме Рисса — Фишера следует, что если числа $\{A_n\}$ определяются из (11), то ряд $\sum\limits_0^\infty A_n \Phi_n(z)$ равномерно сходится в любой конечной части плоскости к некоторой целой функции $f_1(z) \in H_2(e^{-2\sigma r^2})$, имеющей период $2\omega i$. Функция $F(z) = f(z) - f_1(z) \in H_2(e^{-2\sigma r^2})$ имеет период $2\omega i$, и

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} e^{-2\sigma r^2} F(re^{i\vartheta}) \overline{\Phi_n(re^{i\vartheta})}\, r\, dr\, d\vartheta = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Но отсюда следует, что

$$F\left(\frac{\pi}{2\omega\sigma} n\right) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} e^{-2\sigma r^2} F(re^{i\vartheta})\, e^{n\frac{\pi}{\omega} re^{-i\vartheta}}\, r\, dr\, d\vartheta = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (15)$$

Таким образом, в силу периодичности, $F(z)$ удовлетворяет условиям: 1) $|F(z)| < A_2 e^{(\sigma+\varepsilon)x^2}$; 2) $F\left(\frac{\pi}{2\omega\sigma} n + 2\omega i m\right) = 0$ $(m = 0, \pm 1, \ldots,$ $n = 0, 1, 2, \ldots)$. Отсюда, в силу леммы 2, $F(z) \equiv 0$. Таким образом,

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty A_n \Phi_n(z). \qquad (16)$$

Рекуррентные формулы (12), определяющие коэффициенты $\{A_n\}$, следуют из разложения (16), если заметить, что при $n \geqslant 1$

$$\Phi_n(0) = \Phi_n\left(\frac{\pi}{2\omega\sigma}\right) = \ldots = \Phi_n\left(\frac{\pi}{2\omega\sigma}(n-1)\right) = 0, \quad \Phi_n\left(\frac{\pi}{2\omega\sigma} n\right) \neq 0.$$

Следствие. Для всякой целой периодической функции периода $2\omega i$, имеющей порядок < 2 или же порядок, равный 2, а тип $< \sigma$, имеет место разложение (16).

Наконец, полученный результат можно сформулировать так:

Теорема 2. *Если $f(z) \in H_2(e^{-2\sigma r^2})$ и имеет период $2\omega i$, то интерполяционные „полиномы“*

$$\pi_n(z) = \sum_{m=0}^{n-1} B_m e^{m\frac{\pi}{\omega} z}, \quad \pi_n\left(\frac{\pi}{2\omega\sigma} k\right) = f\left(\frac{\pi}{2\omega\sigma} k\right) \quad (k = 0, 1, \ldots n-1)$$

совпадают с отрезками ряда Фурье функции $f(z)$ по ортогональной системе $\{\Phi_n(z)\}$

$$\pi_n(z) = \sum_{m=0}^{n-1} A_k \Phi_k(z).$$

Следовательно, эти „полиномы“ равномерно сходятся в любой замкнутой части плоскости к функции $f(z)$, а на всей плоскости они сходятся к $f(z)$ в смысле

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} e^{-2\sigma r^2} |f(re^{i\vartheta}) - \pi_n(re^{i\vartheta})|^2\, r\, dr\, d\vartheta = 0.$$

Институт математики и механики
Академии наук Арм. ССР

Поступило
27 XII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Джрбашян, Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН Арм.ССР, в. 2 (1948).
[2] Г. Полиа и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, ч. 1, 1937, отд. III, задача 178.