Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 5

АСТРОНОМИЯ

Член-корреспондент АН СССР В. К. АРКАДЬЕВ

НАИБОЛЬШИЕ РАЗМЕРЫ ТВЕРДОГО ЦИЛИНДРА

Жидкие тела принимают сферическую форму, если на них не действуют центробежная сила или внешние силы. Звезды принимают форму шара под влиянием тяготения, капельки тумана под действием поверхностного натяжения. Сферические тела могут быть любого размера. Твердые несферические тела не могут быть произвольно большими. Они разрушаются вследствие притяжения выступающих частей к центру и тогда тоже принимают округлую форму.

Здесь мы ставим элементарную задачу о прочности удлиненного тела в виде цилиндра и ищем, при какой относительной длине $\Lambda = L/2R$ цилиндр легче всего разрушается.

Очевидно, что кубический цилиндр (т. е. вписанный в куб) приближается к сфере и является сравнительно прочным, так как в ней все силы одинаково направлены к центру, создавая внутри гидростатическое давление. У очень длинного концы сильно удалены и потому при том же объеме цилиндра они слабо притягиваются, и цилиндр опять является прочным. Поэтому существует некоторая средняя длина Λ, при которой цилиндр легче всего разрушается: in statu nascendi, т. е. в момент образования, например, при расколе планеты, или от повышения температуры, или с течением времени: известно, что измеряемая нами прочность материалов вследствие ползучести и усталости не сохраняет постоянного значения (1).

Заменим вычисление давления одной половины цилиндра на другую половину длины l вычислением давления P_1 стержня высоты l и сечения 1 см², стоящего на средине основания одного из полуцилиндров. Исходя из напряженности силы тяготения на продолжении оси цилиндра, можно найти

$$P_1 = 2\pi k \delta^2 l^2 p_1,$$

где k — константа тяготения, δ — плотность цилиндра,

$$p_1 = \frac{\rho^2}{2} \ln \frac{(\sqrt{1+\rho^2}+1)^2}{2\rho\left(\sqrt{1+\frac{\rho^2}{4}}+1\right)} + 1 + \sqrt{1+\rho^2} - 2\sqrt{1+\frac{\rho^2}{4}}, \tag{1}$$

$$\rho = \frac{R}{l} = \frac{1}{\Lambda}.$$

В пределах $0{,}25 < \rho < 0{,}95$ функция p_1 может быть представлена интерполяционной формулой

$$p_1 = 0{,}388(\rho - 0{,}1). \tag{2}$$

Силы взаимного притяжения средних частей цилиндра создают боковое давление, растущее по гиперболе и достигающее у оси длинного цилиндра в вершине гиперболы значения

$$P_2 = 2\pi k \delta^2 l^2 p_2, \tag{3}$$

где

$$p_2 = \sqrt{1+\rho^2} - 1. \tag{4}$$

Радиальное давление, среднее по площади сечения, почти равно $P_2/2$, почему мы принимаем, что, за вычетом гидростатического давления, одностороннее дифференциальное осевое давление в средине цилиндра

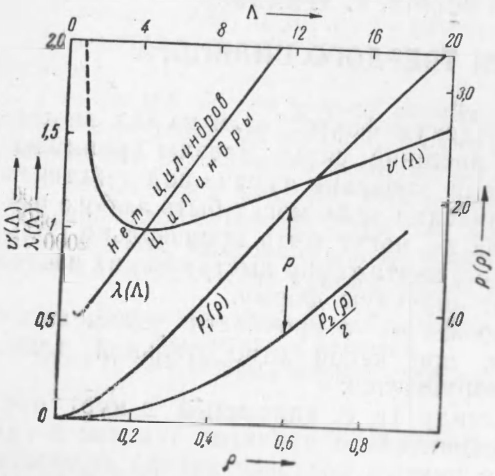

Рис. 1. Над кривой λ — область цилиндров невозможной длины при данной относительной длине $\Lambda = L/2R$, над кривой v — область цилиндров невозможного объема при данной Λ. Кривая p_1 — безразмерное осевое давление и p_2 — безразмерное боковое давление

$$P = 2\pi k \delta^2 l^2 p,$$

где $p = p_1 - \frac{p_2}{2}$.

Далее мы принимаем гипотезу, что $P = \sigma$, где σ — предельное сопротивление материала цилиндра на сдавливание в условиях указанного гидростатического давления.

Тогда

$$L = 2l = \left(\frac{2\sigma}{\pi k \delta^2}\right)^{1/2} p^{-1/2}$$

есть предельная длина устойчивого цилиндра. Так как объем цилиндра

$$V = \frac{\pi}{4} L^3 \rho^2, \tag{5}$$

то можно найти предельный объем устойчивого цилиндра

$$V = (2\pi)^{-1/2} \left(\frac{\sigma}{k\delta^2}\right)^{3/2} \rho^2 p^{-3/2}.$$

Минимальный предельный объем устойчивого цилиндра соответствует $\Lambda = 1/\rho = e^{3/2} = 4{,}48$, когда $p^{-1/2} = 5{,}15$ и $\rho^2 p^{-3/2} = 6{,}797$.

Тогда

$$L_{V_{\min}} = H = 5{,}15 \left(\frac{2}{\pi k} \frac{\sigma}{\delta^2}\right)^{1/2} \quad \text{и} \quad V_{\min} = 6{,}8\,(2\pi)^{-1/2} \left(\frac{\sigma}{k\delta^2}\right)^{3/2}. \tag{6}$$

На рис. 1 представлены кривые

$$\lambda = \frac{L}{H} = \frac{p^{-1/2}}{5{,}15} \quad \text{и} \quad v = \frac{V}{V_{\min}} = \frac{\rho^2 p^{-3/2}}{6{,}8}.$$

Величины $H = L_{V_{\min}}$ и $V_{\min}$ можно рассматривать как константы вещества. Из приведенных соотношений легко вывести, что при $\rho^2_{V_{min}} = 0{,}05$, см. (6),

$$H = \sqrt[3]{\frac{80}{\pi}}\sqrt[3]{V_{min}} \cong 3\sqrt[3]{V_{min}}.$$

Длина и объем устойчивого цилиндра данной Λ

$$L = \lambda H \quad \text{и} \quad V = vV_{min}. \tag{7}$$

В табл. 1 приведены значения H для некоторых веществ.

Таблица 1

Вещество	H, км
Гранит	1200—4000
Мрамор	1200—3000
Песчаник	840—3000
Известняк	700—3500
Железо	2000
Свинец	170

Из табл. 1 следует, что цилиндр из свинца, имеющий длину более 170 км и диаметр 38 км, не может существовать, так как он осядет и расширится в средине под влиянием взаимного притяжения своих концов.

На рис. 1 видно, что λ, а следовательно и L, имеет линейный ход в пределах $1{,}5 < \Lambda < 15$. В этой области

$$L = (0{,}33 + 0{,}148\,\Lambda)\,H. \tag{8}$$

Объем V в некоторых пределах меняется тоже почти линейно и при $6 < \Lambda < 20$ он может быть определен по формуле

$$V = (0{,}75 + 0{,}0425\,\Lambda)\left(\frac{H}{3}\right)^3. \tag{9}$$

Когда $1{,}5 < \Lambda < 6$, V может быть определен по v диаграммы.

Решим задачу: при какой длине L начнет разрушаться цилиндр, имеющий диаметр $2R$?

По уравнению (8) при $0{,}085\,H < R < 0{,}186\,H$

$$L = \frac{H}{3 - 0{,}222\,\dfrac{H}{R}}. \tag{10}$$

Например, какова предельная длина железного цилиндра, имеющего диаметр $2R = 350$ км? Согласно (10), $L = \frac{2000}{3-2{,}54} = 4350$ км. При $2R = 800$ км $L = 1685$ км. Наименьший объем цилиндр имеет при $H/R = 9$. Тогда (10), в согласии с (8), дает $L = 2000$ км. При малых R, см. (1) и (4), когда $\rho < 0{,}1$, $p = \frac{\rho^2}{2}\ln\Lambda$. Тогда $\frac{L}{H} = \lambda = \frac{p^{-1/2}}{5{,}15} = \frac{\sqrt{2}\,\Lambda}{5{,}15\sqrt{\ln\Lambda}}$, $\ln\frac{L}{2R} = \frac{H^2}{2\cdot 5{,}15^2R^2} = \frac{H^2}{53R^2}$ или $\lg\frac{L}{2R} = \frac{H^2}{122R^2}$.

Железный цилиндр диаметром 1 м начнет разрушаться, только когда $\lg\frac{L}{2R} = 0{,}0082\,\frac{4\cdot 10^6\cdot 4}{10^{-6}} = 13{,}1\cdot 10^{10}$ или при $L = 10^{13{,}1\cdot 10^{10}-3}$ км.

Астероид Эрос, по некоторым наблюдениям [2], имеет цилиндрическую форму с $L = 35$ км и $2R = 11$ км и, следовательно, $\Lambda = 3{,}18$. Принимая эти размеры за предельные, мы можем найти как минимум $H = \frac{35}{0{,}38 + 0{,}47} = 44$ км. Согласно (6) $\frac{\sigma}{\delta^2} = \left(\frac{H}{5{,}15}\right)^2\frac{\pi k}{2} = \left(\frac{44\cdot 10^5}{5{,}15}\right)^2\frac{3{,}14\cdot 6{,}67\cdot 10^{-8}}{2} = 7{,}7\cdot 10^4$ ед. см·г·сек.

Если бы Эрос не вращался, то, положив δ равным 3, можно было бы сказать, что σ должно быть порядка 0,7 кг/см².

Это очень небольшая прочность, соответствующая очень рыхлым породам ([3]) (рыхлый песчаник, торф).

Из уравнения (8) следует, что невращающиеся астероиды или планеты формы Эроса не могут иметь протяжение более $(0{,}33 + 0{,}47) \times 4000 = 3200$ км, если они не состоят из вещества более прочного, чем гранит, и более 1600 км, если состоят из железа. Однако тела большего объема могут иметь большее протяжение при $\Lambda > 6$, см. (8).

Давление в средине цилиндра, согласно (1), определяется величиной p_1, см. (2).

Для Эроса $\rho = 0{,}31$, $p_1 = 0{,}082$ и $P_1 = 2\pi k\delta^2 l^2 \cdot 0{,}082 = 6{,}28 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 9 \times \left(\frac{35}{2}\, 10^5\right)^2 \cdot 0{,}082 = 116 \cdot 10^5 \cdot 0{,}082 = 9{,}5 \cdot 10^5$ дин/см², или почти 1 кг/см². Поперечное давление в центре, см. (4), $P_2 = 116 \cdot 10^5 \cdot 0{,}05 = 5{,}8 \cdot 10^5$ дин/см², или почти 0,6 кг/см². Таким образом, одностороннее давление в средине Эроса принятой здесь формы около 1 атм., а гидростатическое — несколько более $^1/_2$ атм. Учитывая вращение Эроса (период 5 час. 16 мин.), получаем осевое давление в 2 раза меньше.

Поступило
21 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Берч, Д. Шерер и Г. Спайсер, Справочник для геологов по физическим константам, Под ред. А. П. Виноградова, М., 1949, стр. 118, 121, 123. [2] Fletcher Watson, Journ. Astronom. Brit. Association, 47, oct., No. 10 (1937). [3] Е. М. Сергеев, Вестн. Моск. ун-та, № 9, 81 (1948). [4] Н. И. Идельсон, Теория потенциала, М.-Л., 1932, стр. 268.