Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. Д. ДОЛЬБЕРГ

О ФОРМАХ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 9 II 1950)

В настоящей заметке мы ограничимся изучением продольного изгиба стержней, лежащих лишь на жестких опорах. Как известно, в этом случае задача приводится к интегрированию уравнения:

$$[B(x)\, y''(x)]'' + p\,[f(x)\, y'(x)]' = 0, \tag{1}$$

где $B(x)$ — изгибная жесткость стержня, $pf(x)$ — сумма осевых сил, взятых по одну сторону от сечения. Так как все опоры предполагаются жесткими, то интеграл уравнения (1) должен обращаться в нуль вместе с одной из своих первых двух производных на границе и, кроме того, в точках, отвечающих промежуточным опорам. Функции $B(x)$ и $f(x)$, как это следует из механического смысла задачи, положительны и кусочно-непрерывны.

Блюменталь [1] привел пример, в котором путем варьирования нагрузки можно получить первую форму изгиба либо безузловую, либо имеющую один узел. Этот же автор дал достаточное условие того, чтобы стержень постоянной жесткости, имеющий опоры лишь на концах, обладал первой безузловой формой изгиба, а его вторая форма имела бы лишь один узел. Это условие состоит в требовании монотонности функции $f(x)$.

В предлагаемой заметке, наряду с вопросами вспомогательного характера, мы решаем вопрос о достаточном условии того, чтобы n-я форма изгиба стержня имела точно $n+1$ узел, не считая узлов на промежуточных опорах.

Используя некоторые прежние результаты [2], можно доказать, что:

Теорема 1. *Достаточными условиями того, чтобы интеграл уравнения* (1), *удовлетворяющий граничным условиям, не обращался на границе в нуль со своими первыми двумя производными, является требование, чтобы либо*

$$d\left[\frac{B(x)}{x-a}\right] \leqslant 0, \quad d\,[(x-a)\, f(x)] \geqslant 0,$$

либо (2)

$$d\left[\frac{B(x)}{b-x}\right] \geqslant 0, \quad d\,[(b-x)\, f(x)] \leqslant 0$$

(a и b — координаты начала и конца стержня).

Следствием этой теоремы является

Теорема 2. *Условия (2) являются достаточными для того, чтобы каждой критической силе отвечала одна форма потери устойчивости.*

Действительно, допустив существование двух интегралов уравнения (1), удовлетворяющих граничным условиям, можно построить интеграл, обращающийся на границе в нуль вместе со своими первыми двумя производными, что противоречит теореме 1.

Кроме того, можно показать, что:

Теорема 3. *При выполнении условий (2) критические силы стержня возрастают при уменьшении его длины.*

В дальнейшем будем считать условия (2) выполненными.

Все последующие рассуждения построены на исследовании свойств критических сил стержня при введении дополнительной жесткой опоры с переменным местом положения.

Следуя Треффтцу ([3]), заменим уравнение (1) эквивалентным интегральным уравнением

$$y'(x) = p\int_a^b K_{11}(x, s)\, y'(s)\, f(s)\, ds. \tag{1'}$$

Здесь и в последующем мы пользуемся обозначением

$$K_{ij}(x, s) = \frac{\partial^{i+j} K(x, s)}{\partial x^i\, \partial s^j}.$$

Если ввести в точке ξ дополнительную жесткую опору, то ядро соответствующего интегрального уравнения будет выражаться через исходное следующим образом:

$$\overline{K}_{11}(x, s) = K_{11}(x, s) - \frac{K_{10}(x, \xi)\, K_{01}(\xi, s)}{K(\xi, \xi)},$$

а само уравнение примет вид:

$$z'(x, \xi) = Q(\xi)\int_a^b K_{11}(x, s)\, z'(s, \xi)\, f(s)\, ds -$$

$$- Q(\xi)\,\frac{K_{10}(x, \xi)}{K(\xi, \xi)}\int_a^b K_{01}(\xi, s)\, z'(s, \xi)\, f(s)\, ds, \tag{3}$$

где $z(x, \xi)$ — функция прогиба и $Q(\xi)$ — критическая сила построенного стержня.

Пользуясь этим уравнением, Я. Л. Нудельман ([4]) показал, что критические силы исходного и построенного стержней удовлетворяют неравенствам:

$$Q_{n-1}(\xi) \leqslant P_n \leqslant Q_n(\xi),$$

причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда дополнительная опора попала в узел n-й формы потери устойчивости исходного стержня. При этом остается открытым вопрос о том, какая из двух сил, $Q_{n-1}(\xi)$ или $Q_n(\xi)$, достигает значения P_n.

Отметим здесь, что условие

$$\int_a^b K_{01}(\xi, s)\, z'(s, \xi)\, f(s)\, ds = 0$$

необходимо и достаточно для совпадения дополнительной опоры с узлом формы изгиба исходного стержня.

Сравнивая критические силы $Q_n(\xi)$ с критическими силами двух независимых стержней, получаемых из данного путем наложения жесткого защемления в точке ξ, используя теоремы 1, 2, 3, можно установить:

1) Существует одна и только одна точка ξ, в которой выполняется равенство $P_i^{(1)}(\xi) = P_j^{(2)}(\xi)$ (под $P_i^{(1)}(\xi)$, соответственно $P_i^{(2)}(\xi)$, мы понимаем i-ю критическую силу левого, соответственно правого, стержня).

2) $Q_n(\xi)$ равно одной из критических сил $P_i^{(1)}(\xi)$, $P_j^{(2)}(\xi)$ либо тогда, когда дополнительная опора совпадает с одной из промежуточных, либо в точках, где $P_i^{(1)}(\xi) = P_j^{(2)}(\xi)$, $i + j = n$.

3) В точках, где $Q_n(\xi) = P_i^{(1)}(\xi) = P_j^{(2)}(\xi)$, $z_n'(\xi, \xi) = 0$.

4) Число точек, не совпадающих с промежуточными опорами, в которых $z_n'(\xi, \xi) = 0$, равно $n - 1$.

При изучении функции $Q_n(\xi)$ важно знать выражение для ее производной, которая вычисляется при помощи уравнения (3) и в точках, не совпадающих с промежуточными опорами, равна:

$$\frac{dQ_n(\xi)}{d\xi} = \frac{2Q_n(\xi)}{K(\xi, \xi)} z_n'(\xi, \xi) \int_a^b K_{01}(\xi, s) z_n'(\xi, s) f(s)\, ds. \tag{4}$$

Из равенства (4) видно, что $dQ_n(\xi)/d\xi$ обращается в нуль либо там, где $z_n'(\xi, \xi) = 0$, либо при совпадении дополнительной опоры с узлами формы изгиба исходного стержня.

Выясняя поведение функции при стремлении дополнительной опоры к граничным и промежуточным, можно доказать:

Теорема 4. *Критические силы стержня с дополнительной опорой, расположенной вблизи конца стержня, будут убывать при стремлении этой опоры к граничной.*

Что же касается поведения функции $Q_n(\xi)$ в окрестности промежуточных опор, то предельным переходом в формуле (4) легко получить, что точки, соответствующие промежуточным опорам, не являются, вообще говоря, экстремальными для функции $Q_n(\xi)$. Исключением является лишь случай, когда узел исходного стержня совпадает с промежуточной опорой.

Две последующие теоремы непосредственно приводят к ответу на поставленный в этой заметке вопрос.

Теорема 5. *Узлы первой формы изгиба стержня с дополнительной опорой не могут ни появляться, ни исчезать при перемещении опоры.*

Теорема 6. *Точки, где $z_n'(\xi, \xi) = 0$, либо являются минимальными для функции $Q_n(\xi)$, либо являются узлами $(n+1)$-й формы изгиба исходного стержня.*

Из теоремы 5 легко получить, что первая форма изгиба исходного стержня не имеет узлов, а вторая имеет точно один узел.

Так как $z_1'(\xi, \xi)$ не обращается в нуль внутри интервала $\langle a, b \rangle$, то экстремальными точками $Q_1(\xi)$ будут лишь те, в которых

$$\int_a^b K_{01}(\xi, s) z_1'(\xi, s) f(s)\, ds = 0,$$

т. е. нули функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, где $Q_1(\xi)$ достигает значений P_1 и P_2. Отметим, что при совпадении точки ξ с нулем функции $y_1(x)$ $z_1(x, \xi) = y_1(x)$, аналогично для $y_2(x)$. Но, с другой стороны, как это видно из теоремы 4, число максимумов функции $Q_1(\xi)$ внутри интервала $\langle a, b \rangle$ на единицу больше числа минимумов. Следовательно, функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ будут иметь разное число нулей, и если мы предположим, что функция $Q_1(\xi)$ имеет по крайней мере один минимум внутри интервала $\langle a, b \rangle$, то придем к противоречию с теоремой 5. Таким образом установлено, что $Q_1(\xi)$ не достигает значения P_1, а следовательно, $y_1(x)$ не имеет нулей, отличных от точек, отвечающих промежуточным опорам. Заметив, что $z_1(x, \xi)$ также является первой функцией прогиба стержней на жестких опорах и что существует такое ξ, при котором $z_1(x, \xi) = y_2(x)$, заключаем, что $y_2(x)$ имеет точно один нуль внутри интервала $\langle a, b \rangle$.

Аналогичными рассуждениями, используя теорему 6, мы доказываем:

Теорема 7. *n-я форма изгиба стержня имеет, помимо узлов на промежуточных опорах, точно $n+1$ узел, считая узлы по их кратности (кратность узла не может быть выше второй).*

В заключение заметим, что требование жесткости промежуточных опор является существенным, так как легко показать, что надлежащим выбором местоположения и податливости упругой опоры можно добиться того, чтобы первая форма изгиба имела узел.

Научно-исследовательский институт
математики и механики
Харьковского государственного университета

Поступило
8 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Blumenthal, ZAMM, 17, H. 4 (1937). [2] М. Д. Дольберг, Прикладн. матем. и мех., 6, в. 5 (1942). [3] F. Trefftz, ZAMM, 3, 273 (1923). [4] Я. Л. Нудельман, Тр. Одесск. гос. ун-та, в. 1 (1937).