Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 3

МАТЕМАТИКА

Действительный член Академии наук УССР Б. В. ГНЕДЕНКО

ОБ ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА

Пусть дана последовательность взаимно-независимых случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots,$$

имеющих одну и ту же функцию распределения $F(x)$. Говорят, что $F(x)$ принадлежит области притяжения нормального закона, если при надлежащем подборе постоянных $B_n > 0$ и A_n функции распределения сумм

$$s_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - A_n}{B_n}$$

сходятся к нормальному закону

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz.$$

Вопрос об условиях принадлежности $F(x)$ области притяжения нормального закона был разрешен в 1935 г. одновременно тремя авторами — А. Я. Хинчиным, П. Леви и В. Феллером. Найденное ими условие состоит в том, что при $z \to \infty$

$$z^2 \int\limits_{|x|>z} dF(x) = o\left(\int\limits_{|x|<z} x^2 dF(x) \right);$$

это условие исчерпывающе характеризует $F(x)$ с вероятностной стороны. В ряде задач может оказаться полезным другое условие, выраженное в терминах характеристических функций.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы функция распределения $F(x)$ принадлежала области притяжения нормального закона, необходимо и достаточно, чтобы равномерно в каждом конечном интервале s*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\psi(st)}{\psi(t)} = s^2,$$

где обозначено

$$\psi(t) = \lg |f(t)| = \lg \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF(x) \right|.$$

Необходимость условия теоремы очевидна; для доказательства достаточности выбираем постоянные B_n по правилу: B_n равно максимальному корню уравнения

$$n\psi\left(\frac{1}{B_n}\right) = -\frac{1}{2}$$

и используем одну теорему А. Я. Хинчина ([1], теорема 36).

Только что сформулированный почти тривиальный результат дает возможность дать окончательную формулировку локальной предельной теореме для случая решетчатых слагаемых, доказанной мной ранее ([2,3]) при некоторых ограничительных предположениях.

Напомним, что случайная величина ξ называется решетчатой, если существуют такие числа $h>0$ и a, что любые возможные значения ξ могут быть записаны в виде $a+kh$, где k — целое число ($-\infty < k < \infty$). Величина h называется максимальным шагом, если ни при каких b и $h_1 > h$ нельзя все возможные значения ξ представить в виде $b+k_1h$. Обозначим

$$P_n(k) = P\{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n = an+kh\},$$

$$z_{nk} = \frac{a_n + kh - A_n}{B_n}.$$

Теорема 2. *Для того чтобы для последовательности взаимно-независимых, решетчатых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, имеющих одну и ту же функцию распределения $F(x)$, равномерно относительно k ($-\infty<k<\infty$) имело место соотношение*

$$R_n = \frac{B_n}{h}P_n(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z_{nk}^2/2} \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

(B_n и A_n сохраняют ранее приданный им смысл), необходимо и достаточно, чтобы:

1) *$F(x)$ принадлежала области притяжения нормального закона,*
2) *шаг распределения h был максимальным.*

Необходимость условий теоремы очевидна. Для доказательства их достаточности запишем равенство

$$2\pi R_n = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \int_{-A}^{A} e^{-izx}\left[f^{*^n}\left(\frac{x}{B_n}\right) - e^{-x^2/2}\right]dx,$$

$$I_2 = \int\limits_{A\leqslant|x|<\varepsilon B_n} e^{-izx}f^{*^n}\left(\frac{x}{B_n}\right)dx,$$

$$I_3 = \int\limits_{\varepsilon B_n\leqslant|x|\leqslant\frac{\pi B_n}{h}} e^{-izx}f^{*^n}\left(\frac{x}{B_n}\right)dx,$$

$$I_4 = -\int\limits_{|x|>A} e^{-izx-x^2/2}dx,$$

$$f^*(x) = e^{itA_n/n}f(x),$$

где A — достаточно большое, а $\varepsilon>0$ — достаточно малое числа.

В силу первого условия теоремы, при любом A

$$I_1 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

В силу второго условия, при любом $\varepsilon > 0$

$$I_2 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Выбором достаточно большого A можно I_1 сделать сколь угодно малым.

Теперь

$$|I_2| \leqslant \sum_{s=0}^{k} \int_{2^s A}^{2^{s+1}A} \left| f^*\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|^n dt,$$

где k определяется неравенствами $2^s A < \varepsilon B_n \leqslant 2^{s+1}A$. Выберем ε таким, чтобы при $|t| \leqslant \varepsilon$

$$\frac{\psi(t)}{\psi(^1/_2 t)} = 2^2 + \eta_t$$

и $|\eta_t| < \eta < {}^1/_4$.

Отсюда и из теоремы 1 следует, что

$$\int_{2^s A}^{2^{s+1}A} \left| f^*\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|^n dt \leqslant \int_{A}^{2A} e^{n\psi(t/B_n)\, 2^s\, (1-\eta)^s} dt.$$

А так как в силу условия 1 теоремы в интервале $(A, 2A)$

$$n\psi\left(\frac{t}{B_n}\right) = -\frac{t^2}{2}(1 + o(1)),$$

то

$$|I_2| \leqslant \sum_{s=0}^{k} \int_{A}^{2A} e^{-\frac{t^2}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{s+1}} dt.$$

Отсюда ясно, что при достаточно больших A и n и достаточно малом ε интеграл I_2 может быть сделан сколь угодно малым. Теорема доказана.

Только что доказанная теорема, а также результаты прежде опубликованных статей ([2–5]) дают возможность сформулировать следующее общее предложение.

Теорема 3. *Если случайные величины* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *одинаково распределены, независимы, решетчаты с максимальным шагом* h *и при некотором выборе постоянных* A_n *и* $B_n > 0$ *функции распределения сумм*

$$s_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - A_n}{B_n}$$

сходятся к закону $\Phi(x)$ *(который, как известно, должен быть устойчивым), то равномерно относительно* k $(-\infty < k < \infty)$ *при* $n \to \infty$ *выполняется соотношение*

$$\frac{B_n}{h} P_n(k) - \Phi'(z_{nk}) \to 0.$$

Теорема 1 легко обобщается на случай различно распределенных слагаемых. Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ взаимно-независимы и

$$F_n(x) = P\{\xi_n < x\}, \qquad f_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x).$$

Теорема 4. *Для того чтобы при надлежаще выбранных* $B_n > 0$ *и* A_n *функции распределения сумм*

$$s_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - A_n}{B_n}$$

сходились к нормальному закону и слагаемые ξ_k/B_n $(1 \leqslant k \leqslant n)$ *были предельно постоянны *, необходимо и достаточно, чтобы равномерно в каждом конечном интервале* s

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log \prod_{k=1}^{n} |f_k(st)|}{\log \prod_{k=1}^{n} |f_k(t)|} = s^2;$$

последнее условие может быть записано в следующей эквивалентной форме

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} [1 - f_k(st)]}{\sum_{k=1}^{n} [1 - f_k(t)]} = s^2.$$

Математический институт
Академии наук УССР

Поступило
29 I 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Я. Хинчин, Предельные законы для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1938. [2] Б. В. Гнеденко, Усп. матем. наук, 3, в. 3, 187 (1948). [3] Б. В. Гнеденко, Сборн. тр. Ин-та матем. АН УССР, № 12, 22 (1949). [4] Б. В. Гнеденко, ДАН, 66, № 3 (1949). [5] Б. В. Гнеденко, Украинск. матем. журн., № 4, 3 (1949).

* Т. е. при некотором подборе постоянных a_{kn} и любом $\xi > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} P\left\{ \left| \frac{\xi_k}{B_n} - a_{kn} \right| \geqslant \xi \right\} = 0.$$