Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 3

МАТЕМАТИКА

В. М. ГЛУШКОВ

О НОРМАЛИЗАТОРАХ ПОЛНЫХ ПОДГРУПП В ПОЛНОЙ ГРУППЕ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 20 I 1950)

В настоящей работе доказывается теорема о полноте нормализатора полной подгруппы в полной ZA-группе. Эта теорема сообщена автору С. Н. Черниковым как весьма вероятное предложение. Понятие полноты берется в смысле С. Н. Черникова ([1]).

Лемма. *В ZA-группе без кручения операция извлечения корня однозначна.*

Это предложение доказано А. И. Мальцевым (([2]), § 1, теорема 2, а также § 4).

Теорема. *В полной ZA-группе $\mathfrak{G}$ с кручением или без кручения нормализатор $\mathfrak{N}$ любой полной подгруппы $\mathfrak{A}$ полон.*

Доказательство. Пусть $E=\mathfrak{Z}_0\subset\mathfrak{Z}_1\subset\mathfrak{Z}_2\subset\ldots\subset\mathfrak{Z}_\alpha\subset\ldots$ $\ldots\subset\mathfrak{Z}_\gamma=\mathfrak{G}$ — верхний центральный ряд группы $\mathfrak{G}$.

Введем обозначения: $\mathfrak{A}_\alpha=\mathfrak{Z}_\alpha\cap\mathfrak{A}$ $(0\leqslant\alpha\leqslant\gamma)$, $\mathfrak{N}_\alpha$ — нормализатор (в $\mathfrak{G}$) подгруппы $\mathfrak{A}_\alpha$.

Так как при предельном β $\mathfrak{Z}_\beta=\sum\limits_{\alpha<\beta}\mathfrak{Z}_\alpha$, то $\mathfrak{A}_\beta=\sum\limits_{\alpha<\beta}\mathfrak{A}_\alpha$ (при предельном β).

Далее, $\mathfrak{A}_0=E$ и $\mathfrak{A}_\gamma=\mathfrak{A}$, и потому $\mathfrak{N}_0=\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{N}_\gamma=\mathfrak{N}$. При $\beta\geqslant\alpha$ имеем

$$\mathfrak{A}_\alpha=\mathfrak{Z}_\alpha\cap\mathfrak{A}_\beta=\mathfrak{Z}_\alpha\cap(\mathfrak{N}_\beta\cap\mathfrak{A}_\beta)=(\mathfrak{Z}_\alpha\cap\mathfrak{N}_\beta)\cap\mathfrak{A}_\beta.$$

Являясь, таким образом, пересечением двух нормальных делителей группы $\mathfrak{N}_\beta$, группа $\mathfrak{A}_\alpha$ инвариантна в $\mathfrak{N}_\beta$, и потому:

$$\mathfrak{N}_\beta\subseteq\mathfrak{N}_\alpha\quad(\alpha\leqslant\beta).\tag{1}$$

При предельном β, ввиду (1), $\mathfrak{N}_\beta\subseteq\bigcap\limits_{\alpha<\beta}\mathfrak{N}_\alpha$, с другой стороны, любой элемент из пересечения $\bigcap\limits_{\alpha<\beta}\mathfrak{N}_\alpha$, принадлежа каждому $\mathfrak{N}_\alpha$ $(\alpha<\beta)$, преобразует элементы из $\mathfrak{A}_\alpha$ снова в элементы из $\mathfrak{A}_\alpha$, т. е. любой элемент из $\mathfrak{A}_\beta=\sum\limits_{\alpha<\beta}\mathfrak{A}_\alpha$ снова в элементы из $\mathfrak{A}_\beta$. А это означает, что $\bigcap\limits_{\alpha<\beta}\mathfrak{N}_\alpha\subseteq\mathfrak{N}_\beta$. Из двух полученных включений следует:

$$\mathfrak{N}_\beta=\bigcap_{\alpha<\beta}\mathfrak{N}_\alpha\quad\text{(при предельном }\beta).\tag{2}$$

Таким образом, имеем невозрастающий ряд нормализаторов:

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{N}_0\supseteq\mathfrak{N}_1\supseteq\ldots\supseteq\mathfrak{N}_\alpha\supseteq\ldots\supseteq\mathfrak{N}_\gamma=\mathfrak{N},\tag{3}$$

члены которого, имеющие предельные номера, являются пересечениями всех предшествующих им членов. Первый член этого ряда, по условию, полон. Доказательство полноты групп $\mathfrak{N}_\alpha$ будем вести по индукции. Итак, пусть уже доказано, что все $\mathfrak{N}_\alpha$ $(\alpha < \beta)$ полные, и будем доказывать полноту группы $\mathfrak{N}_\beta$. Пусть β предельное.

Замечая, что центр $\mathfrak{Z}_1$ входит, очевидно, во всякий член ряда (3), переходим к фактор-группе $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_1$. Так как $\overline{\mathfrak{G}}$ — полная ZA-группа без кручения (см. [3], теорема 10), то группа $\overline{\mathfrak{N}}_\beta = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} \overline{\mathfrak{N}}_\alpha$, будучи пересечением полных подгрупп группы $\overline{\mathfrak{G}}$, ввиду леммы, полная. Так как $\mathfrak{Z}_1$ — полный нормальный делитель группы $\mathfrak{N}_\beta$, то отсюда вытекает полнота группы $\mathfrak{N}_\beta$ (см. [3], § 3).

При непредельном β существует $\beta - 1$ и все $\mathfrak{N}_\alpha$ $(\alpha \leqslant \beta - 1)$ полные. Пусть группа $\mathfrak{N}_\beta$ неполная. Ввиду неограниченной разрешимости уравнения $X^k = Y$ в полной ZA-группе (см. [1], теорема 10) и неразрешимости его для некоторых k и Y в неполной группе, найдутся элемент N и целое число k такие, что

$$N^k \subset \mathfrak{N}_\beta, \quad N \subset \mathfrak{N}_{\beta-1}, \quad N \not\subset \mathfrak{N}_\beta. \tag{4}$$

Или, для произвольных элементов A_β из $\mathfrak{A}_\beta$ и $A_{\beta-1}$ из $\mathfrak{A}_{\beta-1}$:

$$N^{-k} A_\beta N^k = A'_\beta \subset \mathfrak{A}_\beta, \tag{5}$$

$$N^{-1} A_{\beta-1} N = A'_{\beta-1} \subset \mathfrak{A}_{\beta-1}. \tag{6}$$

Последнее из условий (4) означает существование в $\mathfrak{A}_\beta - \mathfrak{A}_{\beta-1}$ элемента A_β^k (ввиду полноты A_β его можно считать k-й степенью некоторого элемента $A_\beta \subset \mathfrak{A}_\beta - \mathfrak{A}_{\beta-1}$) такого, что $N^{-1} A_\beta^k N \not\subset \mathfrak{A}_\beta$. Но так как $N^{-1} A_\beta^k N \subset \mathfrak{Z}_\beta$ и $\mathfrak{A}_\beta = \mathfrak{Z}_\beta \cap \mathfrak{A}$, то

$$N^{-1} A_\beta^k N \not\subset \mathfrak{A}. \tag{7}$$

Но тогда и $N^{-1} A_\beta N \not\subset \mathfrak{A}$. Однако, ввиду определения центрального ряда,

$$N^{-1} A_\beta N = Z_{\beta-1} A_\beta, \quad \text{где } Z_{\beta-1} \subset \mathfrak{Z}_{\beta-1}, \tag{8}$$

ричем, ввиду соотношения $N^{-1} A_\beta N \not\subset \mathfrak{A}$, $Z_{\beta-1} \not\subset \mathfrak{A}$.

Из всевозможных представлений вида: $Z_{\beta-1} = Z_\delta A$, где $A \subset \mathfrak{A}$, $Z_\delta \subset \mathfrak{Z}_\delta - \mathfrak{Z}_{\delta-1}$ и $Z_\delta \not\subset \mathfrak{A}$, выберем одно с наименьшим δ. Так как $Z_{\beta-1} = Z_{\beta-1} E$, то, во всяком случае, $\delta \leqslant \beta - 1$, и потому $A = Z_\delta^{-1} Z_{\beta-1} \subset \mathfrak{Z}_{\beta-1}$. Следовательно, $A \subset \mathfrak{A}_{\beta-1}$. Итак, пусть

$$Z_{\beta-1} = Z_\delta A_{\beta-1}, \tag{9}$$

где $Z_\delta \subset \mathfrak{Z}_\delta - \mathfrak{Z}_{\delta-1}$, $A_{\beta-1} \subset \mathfrak{A}_{\beta-1}$, $Z_\delta \not\subset \mathfrak{A}$, фиксированное представление с минимальным δ. Перейдем к фактор-группе $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_{\delta-1}$. Образы элементов и подгрупп при гомоморфизме $\mathfrak{G} \to \overline{\mathfrak{G}}$ будем обозначать постановкой черты сверху соответствующего элемента (подгруппы). Равенства (5) и (6) перепишутся в виде:

$$\overline{N}^{-k} \overline{A}_\beta \overline{N}^k = \overline{A}'_\beta \subset \overline{\mathfrak{A}}_\beta \qquad (\text{для любого } \overline{A}_\beta \text{ из } \overline{\mathfrak{A}}_\beta); \tag{10}$$

$$\overline{N}^{-1} \overline{A}_{\beta-1} \overline{N} = \overline{A}'_{\beta-1} \subset \overline{\mathfrak{A}}_{\beta-1} \ (\text{для любого } \overline{A}_{\beta-1} \text{ из } \overline{\mathfrak{A}}_{\beta-1}). \tag{11}$$

Равенства (8) и (9) дадут вместе:

$$\overline{N}^{-1} \overline{A}_\beta \overline{N} = \overline{Z}_\delta \overline{A}_{\beta-1} \overline{A}_\beta, \tag{12}$$

где

$$\overline{A}_{\beta-1} \subset \overline{\mathfrak{A}}_{\beta-1}, \quad \overline{A}_{\beta} \subset \overline{\mathfrak{A}}_{\beta} - \overline{\mathfrak{A}}_{\beta-1}, \quad \overline{Z}_{\delta} \not\subset \overline{\mathfrak{A}}, \tag{13}$$

причем последнее соотношение обусловлено выбором δ. В самом деле, если $\overline{Z}_\delta \subset \overline{\mathfrak{A}}$, то $Z_\delta = Z_{\delta-1}A'$, где $Z_{\delta-1} \subset \mathfrak{Z}_{\delta-1}$, $A' \subset \mathfrak{A}$ и $Z_{\beta-1} = Z_{\delta-1}A''$, где $A'' \subset \mathfrak{A}$, что противоречит выбору δ.

Покажем, что $\overline{Z}_\delta^k \not\subset \overline{\mathfrak{A}}$. Здесь следует различать два случая:

а) $\delta > 1$ и $\mathfrak{Z}_{\delta-1} \neq E$.

$\overline{\mathfrak{G}}$ — полная ZA-группа без кручения (см. ([3]), теорема 10). Так как в этом случае $\overline{\mathfrak{A}}$, будучи гомоморфным образом полной группы, полная, то уравнение $\overline{X}^k = \overline{Z}_\delta^k$ имеет в $\overline{\mathfrak{A}}$ одно (см. ([1]), теорема 10) и только одно (лемма) решение. Т. е. $\overline{X} = \overline{Z}_\delta \subset \overline{\mathfrak{A}}$, вопреки (13).

б) $\delta = 1$ и $\mathfrak{Z}_{\delta-1} = E$.

Гомоморфизм $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_{\delta-1}$ является, в действительности, изоморфизмом. В этом случае $\overline{Z}_\delta = Z_\delta$, $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$ и т. д. Возводя обе части равенства (12) в степень k и замечая, что Z_δ содержится в центре $\mathfrak{Z}_1$ группы $\mathfrak{G}$, получим:

$$N^{-1}A_\beta^k N = Z_\delta^k A_\beta', \quad \text{где } A_\beta' \subset \mathfrak{A}_\beta.$$

Сравнивая с (7), получим $Z_\delta^k \not\subset \mathfrak{A}$. Итак, всегда

$$\overline{Z}_\delta^k \not\subset \overline{\mathfrak{A}}. \tag{14}$$

Далее,

$$\overline{N}^{-k}\overline{A}_\beta \overline{N}^k = \overline{Z}_\delta^k \overline{A}'_{\beta-1}\overline{A}_\beta, \quad \text{где } \overline{A}'_{\beta-1} \subset \overline{\mathfrak{A}}_{\beta-1}. \tag{15}$$

В самом деле, для $k=1$ формула (15) совпадает с (12) и потому верна. Пусть уже доказано, что $\overline{N}^{-(k-1)}\overline{A}_\beta \overline{N}^{k-1} = \overline{Z}_\delta^{k-1}\overline{A}'_{\beta-1}\overline{A}_\beta$, где $\overline{A}'_{\beta-1} \subset \overline{\mathfrak{A}}_{\beta-1}$. Преобразуя левую и правую части этого равенства посредством элемента $\overline{N}$, получим, ввиду (11), (12) и перестановочности элемента $\overline{Z}_\delta$ со всеми элементами группы $\overline{\mathfrak{G}}$:

$$\overline{N}^{-k}\overline{A}_\beta \overline{N}^k = \overline{Z}_{\delta-1}^{k-1}\overline{N}^{-1}\overline{A}'_\beta \overline{N}\,\overline{N}^{-1}\overline{A}_\beta \overline{N} =$$

$$= \overline{Z}_\delta^{k-1}\overline{A}''_{\beta-1}\overline{Z}_\delta \overline{A}_{\beta-1}\overline{A}_\beta = \overline{Z}_\delta^k \overline{A}'''_{\beta-1}\overline{A}_\beta, \quad \text{где } \overline{A}'''_{\beta-1} \subset \overline{\mathfrak{A}}_{\beta-1}.$$

Итак, соотношение (15) можно считать доказанным. Из сравнения (15) и (10) выводим: $\overline{Z}_\delta^k \subset \overline{\mathfrak{A}}$, что противоречит (14).

Полученное противоречие доказывает полноту $\mathfrak{N}_\beta$, а вместе с тем и теорему.

Теорема теряет силу для произвольных полных групп, как показывает приводимый ниже пример. Предварительно заметим, что всякая элементарная (а тем более простая) группа с неограниченными в совокупности порядками элементов является полной.

Пусть теперь $\mathfrak{G}$ — группа всевозможных четных подстановок чисел 1, 2, 3,... Группа $\mathfrak{G}$ простая и потому, ввиду замечания, полная. Обозначим через $\mathfrak{G}_1$ подгруппу группы $\mathfrak{G}$, порожденную подстановками, оставляющими на месте символы 1 и 2. Она изоморфна $\mathfrak{G}$ и потому полная. Нормализатор $\mathfrak{N}$ погруппы $\mathfrak{G}_1$ отличен от нее, ибо содержит, например, элемент (1,2) (3,4), не содержащийся в $\mathfrak{G}_1$. Покажем неполноту $\mathfrak{N}$. В самом деле, пусть $N \subset \mathfrak{N}$. Обозначим через i символ, который подстановка N переводит в 1. Если $i \neq 1$ или 2, то в $\mathfrak{G}_1$ найдется подстановка G_1, перемещающая символ i. Но тогда $B = N^{-1}G_1N$ перемещает, очевидно, символ 1, т. е. $B \not\subset \mathfrak{G}_1$ и потому $N \not\subset \mathfrak{N}$. Итак, символ 1 либо неподвижен при подстановках из $\mathfrak{N}$, либо 2 переходит в 1. Так как подобные рассуждения применимы и к символу 2, то для подстановок из $\mathfrak{N}$ получаем две возможности: а) $N = (1)(2)\ldots$; б) $N = (1, 2)\ldots$

Во всяком случае, уже подгруппа, порожденная квадратами элементов подгруппы $\mathfrak{N}$, не содержит подстановок, перемещающих символы 1 и 2, и потому совпадает с $\mathfrak{G}_1$ (ибо $\mathfrak{G}_1$ полна). Это и показывает неполноту нормализатора $\mathfrak{N}$, ибо, по предыдущему, $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{G}_1$.

Опираясь на доказанную теорему и теорему 7 из работы А. И. Мальцева [2], можно сформулировать следующее обобщение теоремы о нормализаторе для случая ZA-групп без кручения:

В ZA-группе без кручения нормализатор любой сервантной подгруппы сервантен.

Поступило
29 VIII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Черников, Матем. сборн., 18 (60):3, 397 (1946). [2] А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, 201 (1949). [3] С. Н. Черников, Матем. сборн., 22 (64):2, 319 (1948).