Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 5

МАТЕМАТИКА

В. И. СОБОЛЕВ

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 13 II 1950)

Рассматривается уравнение

$$\int_B K(s,t)\,g(t,x(t))\,dt = \mu x(s), \tag{1}$$

где B — ограниченная измеримая область n-мерного евклидова пространства, $K(s,t)$, $s, t \in B$, — симметрическое позитивное, непрерывное на BB ядро и $g(t,u)$ — определенная и измеримая для $t \in B$ и всех вещественных u функция, удовлетворяющая условиям:

α) для всех u_1 и u_2 $|g(t,u_1) - g(t,u_2)| \leqslant N|u_1 - u_2|$;

β) $g(t,-u) = -g(t,u)$;

γ) $ug(t,u) > 0$ для всех $u \neq 0$.

Из α) и β) следует, в частности, что $g(t,0) = 0$ и что $|g(t,u)| \leqslant N(u)$ для всех u.

Уравнение (1) явилось в последние годы предметом ряда исследований при различных предположениях о ядре $K(s,t)$ и функции $g(t,u)$ [1-4]. Ниже дается теорема существования решений этого уравнения, не вытекающая из результатов указанных работ и полученная вариационно-топологическим методом, впервые предложенным Л. А. Люстерником [5].

Пусть $\{\varphi_i(s)\}$ и $\{\lambda_i\}$, $0 < \lambda_i \leqslant \lambda_{i+1}$, — полные системы собственных функций и чисел (в смысле теории линейных интегральных уравнений) ядра $K(s,t)$.

Отметим, что в силу сделанных о ядре предположений ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}$ сходится.

Рассмотрим множество H элементов вида $x = \{\xi_i\}$, где $\{\xi_i\}$ — вещественная последовательность чисел, удовлетворяющая условию $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \xi_i^2 < \infty$.

Если $y = \{\eta_i\}$ — другой элемент H, то полагаем $(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \xi_i \eta_i$ и, следовательно, $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \xi_i^2\right)^{1/2}$. Тогда H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство. Так как $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_i} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \xi_i^2$, то каждому элементу $x = \{\xi_i\} \in H$ соответствует элемент $x(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \varphi_i(s) \in L_2(B)$.

Рассмотрим в пространстве H произвольную сферу $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\xi_i^2 \leqslant C^2$ и на этой сфере функционал

$$f(x) = \int_B G\left(t, \sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\varphi_j(t)\right)dt,$$

где $G(t, u) = \int^{u} g(t, v)\,dv$.

Легко проверить, что $|f(x)| \leqslant \frac{N}{2\lambda_1}\|x\|^2$ и что $f(x)$ дифференцируем в смысле Фреше, причем $df(x, h) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(\xi)\,h_i$, где $g_i(\xi) = \int_B g\left(t, \sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\varphi_j(t)\right)\varphi_i(t)\,dt$.

Вводя оператор $Ax = y$, относящий элементу $x\{\xi_i\}$ элемент $y = \left\{\frac{g_i(\xi)}{\lambda_i}\right\}$, мы имеем, что $df(x, h) = (Ax, h)$, и, следовательно, A — симметрический оператор, порожденный функционалом $f(x)$.

Отметим легко получаемое неравенство

$$|g_i(\xi^{(1)}) - g_i(\xi^{(2)})|^2 \leqslant N^2 \sum_{j=1}^{\infty}(\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)})^2, \tag{2}$$

из которого в силу $g_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, следует:

$$|g_i(\xi)|^2 \leqslant N^2 \sum_{j=1}^{\infty}\xi_j^2.$$

Пусть A_n — вырожденный оператор, определенный равенством

$$A_n x = y_n; \qquad y_n = \left\{\frac{g_1(\xi)}{\lambda_1}, \ldots, \frac{g_n(\xi)}{\lambda_n}, 0, \ldots\right\}.$$

Покажем, что A_n вполне непрерывен на сфере $\|x\| \leqslant C$, для чего покажем, что $A_n x_k \xrightarrow{\text{сильно}} A_n x_0$ при $x_k \xrightarrow{\text{слабо}} x_0$, $\|x_k\|, \|x_0\| \leqslant C$. В самом деле, из $x_k \xrightarrow{\text{слабо}} x_0$ следует $\xi_i^{(k)} \to \xi_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \ldots$ Далее, имеем

$$|g_i(\xi^{(k)}) - g_i(\xi^{(0)})|^2 \leqslant N^2 \sum_{j=1}^{\infty}(\xi_j^{(k)} - \xi_j^{(0)})^2 \leqslant$$

$$\leqslant N^2 \sum_{j=1}^{m_0}(\xi_j^{(k)} - \xi_j^{(0)})^2 + 4N^2C^2 \sum_{j=m_0+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j}.$$

Поэтому для заданного $\varepsilon_1 > 0$, выбирая сперва m_0 так, чтобы $\sum_{j=m_0+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j} < \frac{\varepsilon_1^2}{8N^2C^2}$, а затем $k_0(\varepsilon_1)$ так, чтобы $\sum_{j=1}^{m_0}(\xi_j^{(k)} - \xi_j^{(0)})^2 < \frac{\varepsilon_1^2}{2N^2}$ для $k \geqslant k_0$, будем иметь $|g_i(\xi^{(k)}) - g_i(\xi^{(0)})|^2 < \varepsilon_1^2$ для $k \geqslant k_0$.

Но тогда для заданного $\varepsilon > 0$ при $k \geqslant k_0(\varepsilon_1)$ будем иметь

$$\| A_n x_k - A_n x_0 \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \mid g_i(\xi^{(k)}) - g_i(\xi^{(0)}) \mid^2 < \varepsilon^2,$$

если $\varepsilon_1^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} < \varepsilon^2$, ч. т. д.

Далее, из неравенства

$$\| A_x - A_n x \|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \mid g_i(\xi) \mid^2 \leqslant N^2 \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} <$$

$$< \frac{N^2}{\lambda_1} \| x \|^2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}$$

следует, что $A_n \to A$ при $n \to \infty$ равномерно на сфере $\| x \| \leqslant C$. Но тогда на этой сфере A также вполне непрерывный оператор.

С помощью неравенства (2) получаем:

$$\| Ax_1 - Ax_2 \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \mid g_i(\xi^{(1)}) - g_i(\xi^{(2)}) \mid^2 \leqslant$$

$$\leqslant N^2 \sum_{j=1}^{\infty} (\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)})^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \frac{N^2}{\lambda_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \| x_1 - x_2 \|^2,$$

т. е. оператор A удовлетворяет условию Липшица. Из условий α) и β) получаем, соответственно:

a) $A(-x) = -Ax$, т. е. оператор A нечетный;

b) $(Ax, x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(\xi) \xi_i = \int_B x(t) g(t, x(t)) dt > 0$ для $x \neq 0$, т. е. оператор A позитивный.

Но тогда, в силу теоремы, ранее доказанной автором ([6]), оператор A имеет на сфере $\| x \| = C$ по крайней мере счетное множество различных собственных элементов $\{x_n\}$ и чисел $\{\mu_n\}$

$$Ax_n = \mu_n x_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Напишем уравнение (3) в развернутом виде:

$$\frac{1}{\lambda_i} \int_B g\left(t, \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^{(n)} \varphi_j(t)\right) dt = \mu_n \xi_i^{(n)}.$$

Умножая обе части этого равенства на $\varphi_i(s)$ и суммируя по i, получим:

$$\int_B K(s, t) g(t, x_n(t)) dt = \mu_n x_n(s),$$

где $x_n(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^{(n)} \varphi_i(s)$.

Таким образом, приходим к следующей теореме:

Теорема. *Уравнение* (1) *при сделанных относительно ядра* $K(s, t)$ *и функции* $g(t, u)$ *предположениях имеет по крайней мере счетное число различных собственных функций*

$$x_n(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^{(n)} \varphi_i(s)$$

и чисел μ_n, *причем*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \left(\xi_i^{(n)}\right)^2 = C^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Замечания 1. Мы предполагали, что ядро $K(s, t)$ не вырожденное. В случае вырожденного ядра $K(s, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(s)\varphi_i(t)}{\lambda_i}$ можно утверждать существование у уравнения (1) по крайней мере n собственных функций.

2. Условие γ) можно ослабить, заменив его условием, что $\int_B x(t) g(t, x(t))\, dt > 0$ для любой ненулевой функции $x(t) \in L_2(B)$.

3. Вместо непрерывности ядра $K(s, t)$ на BB можно потребовать, чтобы $K(s, t)$ имело суммируемый на BB квадрат и чтобы $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$.

4. Аналогичную теорему можно получить и для системы (см., например, (7)):

$$\int_B K_i(s, t)\, g_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))\, dt = \mu_i x_i(s), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

при соответствующих предположениях о ядрах $K_i(s, t)$ и функциях $g_i(t, u_1, \ldots, u_n)$.

Воронежский государственный университет

Поступило 18 III 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Немыцкий, Матем. сб., 41, 440 (1934). [2] M. Colomb, Math. Zs., 39, H. 1 (1934). [3] М. М. Вайнберг, ДАН, 46, № 2 (1945). [4] М. М. Вайнберг, ДАН, 58, № 6 (1947). [5] Л. А. Люстерник, Изв. АН СССР, сер. матем., № 3, 257 (1939). [6] В. И. Соболев, ДАН, 31, № 8 (1941). [7] А. П. Гремяченский, ДАН, 60, № 3 (1948).