Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 5

МАТЕМАТИКА

С. Х. СИРАЖДИНОВ

ЭРГОДИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 II 1950)

Рассмотрим неоднородную дискретную цепь Маркова с единственно возможными и несовместимыми состояниями $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

Пусть $P_{ij}(k, m)$ — вероятность перехода за $m-k$ шагов из состояния E_i в состояние E_j. Цепь вполне определяется заданием вероятностей $P_{ij}(k, k+1) = P_{ij}(k)$ для $k=1, 2, \ldots$ и $i, j = 1, \ldots, n$, т. е. заданием последовательности стохастических матриц

$$M^{(k)} = \| P_{ij}(k) \|_1^n.$$

Для всех матриц $M^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots)$ единица будет характеристическим числом. Обозначим через λ_k следующее по модулю характеристическое число матрицы $M^{(k)}$ (оно может быть и равным единице).

А. Н. Колмогоровым было высказано предположение, что условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\lambda|_k) = \infty \tag{1}$$

является достаточным для того, чтобы рассматриваемая цепь подчинялась эргодическому принципу [1], т. е. чтобы имело место

$$| P_{ij}(k, m) - P_{i'j}(k, m) | \to 0 \quad \text{при } m \to \infty \quad \text{для } k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

В настоящей заметке доказывается, что в случае $n=2$ для подчинения рассматриваемой цепи эргодическому принципу условие (1) является необходимым и достаточным и что в случае $n>2$ условие (1) не является достаточным.

Докажем первую часть утверждения (случай $n=2$). В этом случае характеристические числа матрицы $M^{(k)}$ будут 1 и λ_k. Далее, заметим, что $P_{ij}(k, m)$ являются элементами матрицы

$$M^{(k, m)} = M^{(k)} M^{(k+1)} \ldots M^{(m-1)},$$

которая, являясь стохастической, имеет характеристические числа 1 и $\lambda_{k, m} = \lambda_k \lambda_{k+1} \ldots \lambda_{m-1}$. Если $\lambda_{k, m} \neq 1$, то, согласно формуле Перрона [2], имеем

$$P_{ij}(k, m) = P_j(k, m) + \frac{\lambda_{k, m}}{\lambda_{k, m} - 1} M_{ij}^{(k, m)}(\lambda_{k, m}), \tag{3}$$

где $P_j(k, m) = \dfrac{M_{jj}^{(k, m)}(1)}{M_{11}^{(k, m)}(1) + M_{22}^{(k, m)}(1)}$ $(j=1, 2)$ и $M_{ij}^{(k, m)}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение определителя $M^{(k,m)}(\lambda) = | E\lambda - M^{(k,m)} |$, соответствующее строке j и столбцу i.

Простой подсчет показывает, что

$$\begin{aligned} M_{12}^{(k,m)}(\lambda_{k,m}) &= -M_{11}^{(k,m)}(\lambda_{k,m}) = P_{12}(k,m), \\ M_{21}^{(k,m)}(\lambda_{k,m}) &= -M_{22}^{(k,m)}(\lambda_{k,m}) = P_{21}(k,m). \end{aligned} \tag{4}$$

Написав соотношение (3) для $i = 1$ и $i = 2$ и вычитая одно из другого, получим с учетом (4):

$$| P_{1j}(k,m) - P_{2j}(k,m) | = \frac{| \lambda_{k,m} |}{| \lambda_{k,m-1} |} [P_{12}(k,m) + P_{21}(k,m)]. \tag{5}$$

Отсюда следует, что, если

$$| \lambda_{k,m} | \to 0 \quad \text{при } m \to \infty \quad \text{для } k = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

то имеет место (2). И наоборот, если имеет место (2), то непременно

$$P_{12}(k,m) + P_{21}(k,m) \to 1$$

и, следовательно,

$$| \lambda_{k,m} | \to 0.$$

Равносильность условия (6) условию (1) следует, например, из того, что неравенства

$$\frac{1 - | \lambda_k |}{| \lambda_k |} \geqslant | \ln | \lambda_k | | \geqslant 1 - | \lambda_k |$$

справедливы для всех $| \lambda_k | \leqslant 1$.

Вторая часть утверждения (случай $n > 2$) доказывается следующим примером, принадлежащим Т. А. Сарымсакову.

Пусть неоднородная цепь с тремя возможными состояниями регулируется следующими матрицами:

$$M^{(2k+1)} = \begin{Vmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad M^{(2k)} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & \delta \end{Vmatrix},$$

где α, β, γ и δ все > 0.

Для такой цепи условие (1) выполняется ($| \lambda_{2k+1} | = \sqrt{\beta}$, $| \lambda_{2k} | = \sqrt{\gamma}$), но в то же время эргодический принцип не имеет места, в чем можно убедиться непосредственным вычислением финальных вероятностей.

З а м е ч а н и е. В общем случае (n — любое), если Δ_k — определитель матрицы $M^{(k)}$, то условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - | \Delta_k |) = \infty \tag{7}$$

является необходимым следствием эргодического принципа.

В самом деле, если $\Delta_{k,m}$ — определитель матрицы $M^{(k,m)}$, то $\Delta_{k,m} = \Delta_k \Delta_{k+1} \ldots \Delta_{m-1}$, и, если для данной цепи эргодический принцип имеет место, то $\Delta_{k,m} \to 0$ при $m \to \infty$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ Последнее утверждение равносильно условию (7).

Поступило
10 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Усп. матем. наук, 5, 5, 52 (1938). [2] В. И. Романовский, Дискретные цепи Маркова, 1949.