Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 5

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД и М. Л. ЦЕТЛИН

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ УНИМОДУЛЯРНЫХ МАТРИЦ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 II 1950)

1. Пусть K_n — алгебра Ли всех матриц n-го порядка, т. е. совокупность всех матриц n-го порядка $e, f, \ldots$, в которых обычным образом определены операции сложения и умножения на число и определена операция коммутирования матриц $[f, g] = fg - gf$.

Мы говорим, что задано конечномерное представление алгебры Ли K_n, если каждому элементу $f \in K_n$ отвечает матрица F некоторого порядка N, так что из $f \to F$ и $g \to G$ следует, что $\lambda f + \mu g \to \lambda F + \mu G$ и $[f, g] \to [F, G]$. Цель этой заметки — найти все неприводимые представления K_n. Картан дал систему инвариантов, однозначно определяющих представление, и указал для каждой системы этих инвариантов (так называемого старшего веса представления) принципиальную возможность конструкции представления, отвечающего данным инвариантам (данному старшему весу). Однако задачу об эффективном задании представления нельзя было еще считать решенной*.

В этой заметке мы зададим эффективно, формулами, само представление.

Обозначим через e_{ik} матрицу n-го порядка, у которой на пересечении i-й строчки и k-го столбца стоит 1, а на остальных местах стоят нули. Обозначим через E_{ik} матрицу N-го порядка, которая при представлении отвечает элементу $e_{ik} \in K_n$. Так как всякая матрица из K_n есть линейная комбинация e_{ik}, то, задав E_{ik}, мы зададим тем самым представление. Таким образом, задача о нахождении всех неприводимых представлений K_n эквивалентна следующей просто формулируемой задаче: *найти n^2 матриц E_{ik} $(i, k = 1, \ldots, n)$ порядка N, удовлетворяющих следующим условиям*:

$$[E_{ik}, E_{kl}] = E_{il} \ (i \neq l), \qquad [E_{ik}, E_{ki}] = E_{ii} - E_{kk},$$
$$[E_{i_1k_1}, E_{i_2k_2}] = 0, \quad \text{если} \quad k_1 \neq i_2, \ i_1 \neq k_2.$$

При этом требуется, чтобы система матриц E_{ik} была неприводимой (т. е. не существовало бы общего для всех E_{ik} инвариантного подпространства).

Решение задачи об эффективном перечислении всех представлений проводится здесь фактическим указанием линейных преобразований (матриц) E_{ik}.

---

* Что имевшаяся конструкция неприводимого представления оставляет желать много лучшего, видно хотя бы из того, что размерности неприводимых представлений были вычислены не из их конструкции, а значительно позднее из совершенно других соображений.

2. Перейдем к перечислению всех представлений. Для того чтобы сделать формулы более ясными, рассмотрим сначала случаи $n=2$ и $n=3$.

Случай $n=2$ тривиален и давно хорошо известен. Ответ здесь следующий: представление задается двумя целыми числами m_1 и m_2 ($m_1 \geqslant m_2$). В пространстве R, в котором действует E_{ik} $(i, k = 1, 2)$, можно выбрать базис из векторов ξ_q, где q — целое число, $m_1 \geqslant q \geqslant m_2$. Представление задается формулами

$$E_{11}\xi_q = q\xi_q, \quad E_{22}\xi_q = (m_1 + m_2 - q)\xi_q,$$
$$E_{12}\xi_q = \sqrt{(m_1 - q)(q - m_2 + 1)}\,\xi_{q+1}, \quad E_{21}\xi_q = \sqrt{(m_1 - q + 1)(q - m_2)}\,\xi_{q-1}. \tag{1}$$

Выпишем теперь формулы для случая $n=3$. Оказывается, что можно написать формулы, аналогичные формулам (1) для $n=2$. Неприводимое представление для $n=3$ задается тремя целыми числами m_1, m_2, m_3 $(m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3)$. Векторы базиса в пространстве R, в котором действуют E_{ik}, мы будем задавать не одним числом q, как в (1), а тремя числами p_1, p_2, q. Для удобства мы будем базисные векторы обозначать так: $\begin{pmatrix} p_1\, p_2 \\ q \end{pmatrix}$. При этом p_1, p_2, q — любые целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$m_3 \leqslant p_2 \leqslant m_2 \leqslant p_1 \leqslant m_1$$

и

$$p_2 \leqslant q \leqslant p_1.$$

Формулы для представлений задаются следующим образом:

$$E_{11}\begin{pmatrix} p_1\, p_2 \\ q \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} p_1\, p_2 \\ q \end{pmatrix}, \quad E_{22}\begin{pmatrix} p_1\, p_2 \\ q \end{pmatrix} = (p_1 + p_2 - q)\begin{pmatrix} p_1\, p_2 \\ q \end{pmatrix},$$

$$E_{12}\begin{pmatrix} p_1\, p_2 \\ q \end{pmatrix} = \sqrt{(p_1 - q)(q - p_2 + 1)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2 \\ q+1 \end{pmatrix},$$

$$E_{21}\begin{pmatrix} p_1\, p_2 \\ q \end{pmatrix} = \sqrt{(p_1 - q + 1)(q - p_2)}\begin{pmatrix} p_1\, p_2 \\ q-1 \end{pmatrix},$$

$$E_{23}\begin{pmatrix} p_1\, p_2 \\ q \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{(m_1 - p_1)(m_2 - p_1 - 1)(m_3 - p_1 - 2)(p_1 - q + 1)}{(p_1 - p_2 + 2)(p_1 - p_2 + 1)}}\begin{pmatrix} p_1+1\;\; p_2 \\ q \end{pmatrix} +$$
$$+ \sqrt{\frac{(m_1 - p_2 + 1)(m_2 - p_2)(m_3 - p_2 - 1)(p_2 - q)}{(p_1 - p_2 + 1)(p_1 - p_2)}}\begin{pmatrix} p_1\;\; p_2+1 \\ q \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$E_{32}\begin{pmatrix} p_1\, p_2 \\ q \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{(m_1 - p_1 + 1)(m_2 - p_1)(m_3 - p_1 - 1)(p_1 - q)}{(p_1 - p_2 + 1)(p_1 - p_2)}}\begin{pmatrix} p_1-1\;\; p_2 \\ q \end{pmatrix} +$$
$$+ \sqrt{\frac{(m_1 - p_2 + 2)(m_2 - p_2 + 1)(m_3 - p_2)(p_2 - q)}{(p_1 - p_2 + 2)(p_1 - p_2 + 1)}}\begin{pmatrix} p_1\;\; p_2-1 \\ q \end{pmatrix},$$

$$E_{33}\begin{pmatrix} p_1\, p_2 \\ q \end{pmatrix} = (m_1 + m_2 + m_3 - p_1 - p_2)\begin{pmatrix} p_1\, p_2 \\ q \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что формулы для $E_{11}, E_{22}, E_{21}, E_{12}$ совпадают с формулами (1) для $n=2$. За недостатком места, мы не пишем выражений для E_{13} и E_{31}; их можно вычислить из формул $E_{13} = [E_{12}, E_{23}]$, $E_{31} = [E_{32}, E_{21}]$.

3. Напишем теперь формулы для неприводимых представлений в случае произвольного n. Нам нужно, следовательно, задать линейные преобразования E_{ik} ($i, k = 1, \ldots, n$), действующие в некотором пространстве R. Представление задается n целыми числами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ($m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_n$). Эти числа совпадают со старшим весом, определенным Картаном.

Базисный вектор в R задается схемой α, состоящей из чисел m_{pq}, $p \leqslant q$, $q = 1, \ldots, n-1$,

$$\alpha = \begin{pmatrix} m_{1,\,n-1} \; m_{2,\,n-1} \ldots \; m_{n-1,\,n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_{13}\; m_{23}\; m_{33} \\ m_{12}\; m_{22} \\ m_{11} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Числа m_{pq} — произвольные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $m_{p,\,q+1} \geqslant m_{pq} \geqslant m_{p+1,\,q+1}$. При этом заданные числа $m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_n$, которыми задается представление, обозначаются здесь через m_{in}. Мы будем базисный вектор, определяемый схемой α, обозначать через (α).

Обозначим $m_{pq} - p = l_{pq}$ и положим

$$a^j_{k-1,\,k} = \left[(-1)^{k-1}\frac{\prod\limits_{i=1}^{k}(l_{i,\,k} - l_{j,\,k-1})\prod\limits_{i=1}^{k-2}(l_{i,\,k-2} - l_{j,\,k-1} - 1)}{\prod\limits_{i \neq j}(l_{i,\,k-1} - l_{j,\,k-1})(l_{i,\,k-1} - l_{j,\,k-1} - 1)}\right]^{1/2}. \tag{4}$$

Обозначим далее через $\alpha^i_{k-1,\,k}$ схему, которая получается из схемы α заменой $m_{i,\,k-1}$ на $m_{i,\,k-1}+1$. Тогда оператор $E_{k-1,\,k}$ в применении к базисному вектору (α) задается формулой

$$E_{k-1,\,k}(\alpha) = \sum_j a^j_{k-1,\,k}(\alpha^j_{k-1,\,k}),$$

$$E_{kk}(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^{k} m_{ik} - \sum_{i=1}^{k-1} m_{i,\,k-1}\right)(\alpha), \tag{5}$$

$$E_{k,\,k-1}(\alpha) = \sum_j b^j_{k,\,k-1}(\bar{\alpha}^j_{k,\,k-1});$$

$\bar{\alpha}^j_{k,\,k-1}$ означает здесь схему, полученную из α заменой $m_{j,\,k-1}$ на $m_{j,\,k-1} - 1$, а $b^j_{k,\,k-1}$ определяется формулой

$$b^j_{k,\,k-1} = \left[(-1)^{k-1}\frac{\prod\limits_{i=1}^{k}(l_{i,\,k} - l_{j,\,k-1} + 1)\prod\limits_{i=1}^{k-2}(l_{i,\,k-2} - l_{j,\,k-1})}{\prod\limits_{i \neq j}(l_{i,\,k-1} - l_{j,\,k-1} + 1)(l_{i,\,k-1} - l_{j,\,k-1})}\right]^{1/2}. \tag{4'}$$

Формулами (5) представление вполне определяется, так как любой оператор E_{pq} можно получить коммутированием операторов (5).

4. Укажем, тем не менее, формулы для E_{pq}. Пусть $p < q$. Обозначим через $\alpha_{pq}^{i_p \ldots i_{q-1}}$ схему, которая получается из α, если увеличить каждый из индексов $m_{i_p p}, \ldots, m_{i_{q-1} q-1}$ на 1, не меняя при этом всех остальных. Тогда

$$E_{pq}(\alpha) = \sum_{(i_p, \ldots, i_{q-1})} a_{pq}^{i_p, \ldots, i_{q-1}} (\alpha_{pq}^{i_p, \ldots, i_{q-1}}), \tag{6}$$

где

$$a_{pq}^{i_p, \ldots, i_{q-1}} = \pm \frac{\prod_{k=p}^{q-1} a_{k,\, k+1}^{i_k}}{\prod_{k=p}^{q-2} \left[\left(l_{i_k k} - l_{i_{k+1} k+1} \right) \left(l_{i_k k} - l_{i_{k+1} k+1} - 1 \right) \right]^{1/2}}.$$

Знак определяется числом инверсий в последовательности $i_p, \ldots, i_{q-1}$. Аналогично определяется E_{pq} для $p > q$. При применении теории представлений чаще всего нужно лишь знание тех (α), которые получаются из данного при применении E_{ik}. Сами же коэффициенты $a_{pq}^{j\ldots}$ при них нужны значительно реже.

Заметим, что если базис (α) считать ортогональным и нормированным, то $(E_{pq})^* = E_{qp}$.

Поступило
13 II 1950