Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 5

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР П. АЛЕКСАНДРОВ и К. СИТНИКОВ

О НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ЗАМКНУТЫХ МНОГООБРАЗИЙ

1. В этой заметке рассматриваются такие непрерывные отображения f замкнутых многообразий (и несколько более общих фигур) X, при которых прообразы всех точек $y \in Y = fX$ имеют диаметры, меньшие некоторого данного $\alpha > 0$. Такие отображения называются α-отображениями.

Заменяя (в смысле теоремы Куратовского, цитированной в заметке ([1])) α-отображения α-сдвигами, как это сделано в ([1]), очень легко доказываем следующие предложения:

Теорема 1. *Пусть лежащий в евклидовом или в гильбертовом пространстве R компакт X является окрестностным ретрактом. Существует такое $\alpha > 0$, что всякое α-отображение компакта X на какой-либо компакт Y порождает изоморфизм групп Бетти X в соответствующие группы Y. При этом за α можно взять любое такое число, что α-окрестность $O(X, \alpha)$ множества X в R ретрагируется на X.*

Теорема 2. *Если X — ориентируемое n-мерное замкнутое псевдомногообразие, лежащее в евклидовом или в гильбертовом пространстве, то существует такое $\alpha > 0$, что из наличия α-отображения f псевдомногообразия X в какое-нибудь n-мерное замкнутое псевдомногообразие Y следует, что Y ориентируемо и что отображение f имеет степень ± 1. При этом за α можно принять любое положительное число меньшее, чем мера существенности основного n-мерного цикла псевдомногообразия X. Если же X есть n-мерное гомологическое ориентируемое многообразие, то существует такое $\alpha > 0$, что из наличия α-отображения f многообразия X в какое-либо n-мерное гомологическое многообразие Y следует, что X и Y гомологически эквивалентны между собою и что f порождает изоморфное отображение групп Бетти X на соответствующие группы Бетти Y. При этом за α можно взять любое такое положительное число, что α-окрестность X ретрагируется на X* (очевидно, всякое такое α меньше меры существенности основного цикла многообразия X).

Для доказательства теоремы 1 берем такое $\alpha > 0$, что окрестность $O(X, \alpha)$ можно ретрагировать на X. Берем какое-нибудь α-отображение f. Пользуясь теоремой Куратовского ([1]), можно предположить, что $fX \subset O(X, \alpha)$ и что f есть α-сдвиг. Тогда отображение $f = f_0$, рассматриваемое как отображение X в $O(X, \alpha)$, гомотопно тождественному отображению f_1: искомую гомотопию получим, определяя $f_\theta x$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, для каждой точки $x \in X$ как точку, делящую отрезок от fx к x в отношении $\theta : (1 - \theta)$. Ретракцию $O(X, \alpha)$ на X обозначим через h; отображение h переводит гомотопию f_θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, в гомотопию, осуществляющуюся уже в пределах самого X. Таким образом, отображение hf

компакта X в себя гомотопно тождественному отображению X на себя и, следовательно, порождает тождественный автоморфизм групп Бетти на себя. Но отсюда вытекает, что порождаемый отображением f гомоморфизм группы Бетти X в группы Бетти Y есть изоморфизм, чем теорема 1 доказана.

2. Пусть X — замкнутое ориентируемое n-мерное псевдомногообразие с основным циклом ξ^n и $\alpha > 0$ меньше меры существенности цикла ξ^n. Пусть f есть α-отображение X в n-мерное замкнутое псевдомногообразие Y. Если X дано как множество, лежащее в гильбертовом пространстве R^∞, то можно отобразить X на псевдомногообразие X', лежащее в некотором евклидовом пространстве $R \subset R^\infty$ достаточно большой размерности (которую, во всяком случае, будем предполагать $\geqslant 2n+1$) посредством топологического отображения, являющегося столь малым сдвигом, что мера существенности основного цикла X' больше α и что fg^{-1} все еще является α-отображением. Поэтому можно ограничиться случаем, когда X лежит в некотором евклидовом пространстве R размерности $\geqslant 2n+1$.

В силу теоремы Куратовского, снова предполагаем, что данное α-отображение f есть α-сдвиг в R. Цикл ξ^n не ограничивает в замкнутой окрестности $[O(X, \alpha)]$, поэтому в $R \setminus [O(X, \alpha)]$ лежит цикл z, коэффициент зацепления $\mathfrak{v}(\xi^n, z)$ которого с ξ^n равен 1. Весь сдвиг f происходит в $O(X, \alpha)$, поэтому $\mathfrak{v}(f\xi^n, z) = 1$, откуда следует, что $f\xi^n$ не ограничивает в Y и, значит, Y ориентируемо. Обозначая через γ степень отображения f, а через η^n — основной цикл псевдомногообразия Y, имеем

$$f\xi^n = \gamma\eta^n, \qquad 1 = \mathfrak{v}(f\xi^n, z) = \gamma\mathfrak{v}(\eta^n, z),$$

откуда следует, что $\gamma = \pm 1$ и, кроме того, что $\mathfrak{v}(\eta^n, z) = \pm 1$.

3. Пусть, наконец, X — ориентируемое n-мерное гомологическое многообразие, лежащее в R, и $\alpha > 0$ таково, что замкнутая окрестность $[O(X, \alpha)]$ ретрагируется на X посредством некоторого отображения h. Пусть f есть α-отображение X на некоторое (по предыдущему, непременно ориентируемое) гомологическое многообразие Y размерности n, которое, в силу теоремы Куратовского, представляем себе лежащим в R таким образом, что f оказывается α-сдвигом. В силу доказанного выше, отображение f имеет степень ± 1 и $\mathfrak{v}(\eta^n, z) = \pm 1$, где η^n и z имеют тот же смысл, что и выше. При ретрагирующем отображении h окрестности $O(X, \alpha)$ на X многообразие Y отображается в X с некоторой степенью γ', причем $h(\eta^n) = \gamma'\xi^n$ и

$$\pm 1 = \mathfrak{v}(\eta^n, z) = \mathfrak{v}(h\eta^n, z) = \gamma'\mathfrak{v}(\xi^n, z) = \gamma'.$$

Итак, каждое из многообразий X и Y может быть отображено на другое со степенью 1, откуда, в силу результатов работы Хопфа (²) (теоремы III^b и II^d), следует, что X и Y гомологически эквивалентны между собою *.

4. Докажем, что порождаемый отображением f гомоморфизм групп Бетти $\Delta^r X$ в группы $\Delta^r Y$, являющийся, в силу теоремы 1, изоморфизмом, есть отображение на всю группу $\Delta^r Y$. Но, в силу теоремы II работы Хопфа (²), каждый цикл в Y гомологичен по области рациональных коэффициентов образу некоторого цикла многообразия X.

---

* В самой работе Хопфа гомологическая эквивалентность доказана для кольца рациональных чисел в качестве области коэффициентов, однако то же доказательство годится и для кольца вычетов по любому модулю m, откуда следует полная гомологическая эквивалентность.

Поэтому достаточно доказать, что группа кручения $\Theta^r X$ отображается на всю группу кручения $\Theta^r Y$. Но это последнее утверждение является очевидным следствием того, что $\Theta^r X$ и $\Theta^r Y$ суть изоморфные конечные группы.

Поступило
10 II 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. Ситников, ДАН, **71**, № 4 (1950). [2] H. Hopf, Journ. f. reine u. angew. Math., **163**, 71 (1930).