

УДК 621.763

<https://doi.org/10.62595/1819-5245-2024-4-5-12>

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ ДВИЖЕНИЯ МОБИЛЬНОГО СОЧЛЕНЕННОГО КОЛЕСНОГО РОБОТА

**М. И. МИХАЙЛОВ**

*Учреждение образования «Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого»,  
Республика Беларусь*

*Разработана методика моделирования кинематики мобильных колесных сочлененных роботов. Приведена кинематическая модель движения мобильного четырехколесного робота с учетом его конструктивных особенностей. Определены скоростные и инерционные параметры положений и расположений мобильных роботов.*

**Ключевые слова:** моделирование, кинематика, мобильный колесный робот, траектория движения робота.

**Для цитирования.** Михайлов, М. И. Моделирование кинематики движения мобильного сочлененного колесного робота / М. И. Михайлов // Вестник Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого. – 2024. – № 4 (99). – С. 5–12. <https://doi.org/10.62595/1819-5245-2024-4-5-12>

## MODELING THE KINEMATICS OF A MOBILE ARTICULATED WHEELED ROBOT MOTION

**M. I. MIHAILOV**

*Sukhoi State Technical University of Gomel,  
the Republic of Belarus*

*A method for modeling the kinematics of mobile articulated wheeled robots has been developed. A kinematic model of a mobile four-wheeled robot motion is presented, taking into account its constructional features. The speed and inertial parameters of the positions and locations of mobile robots are determined.*

**Keywords:** modeling, kinematics, mobile wheeled robot, trajectory of the robot's movement.

**For citation.** Mihailov M. I. Modeling the kinematics of a mobile articulated wheeled robot motion. *Vestnik Gomel'skogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni P. O. Sukhogo*, 2024, no. 4 (99), pp. 5–12 (in Russian). <https://doi.org/10.62595/1819-5245-2024-4-5-12>

### Введение

Как известно, манипуляционные системы структурно представляют собой разомкнутые кинематические цепи. Как правило, при моделировании кинематики звенья моделируются абсолютно твердыми телами [1–5].

Для обеспечения обслуживания робототехнических систем (РТС) необходимо решать прямую и обратную задачи кинематики и динамики. Существует несколько методов решения обратных задач, к числу которых относятся методы обратных преобразований, винтовой алгебры, а также геометрический [6, 7]. Программирование движений манипуляционной системы промышленного робота (Offline программирование) обычно производится поэтапно.

На первом этапе выполняется планирование траекторий движения рабочего органа промышленного робота [8–13].

Эта задача может быть разрешена различными способами, суть которых сводится к аппроксимации или интерполяции выбранной траектории полиномами некоторого класса. Затем выбирается последовательность опорных точек, в которых производится коррекция параметров движения манипулятора на пути от начальной к конечной точке траектории.

Начальная и конечная точки траектории могут быть заданы как в присоединенных, так и в декартовых координатах. Чаще всего используются декартовы координаты, поскольку в них удобнее задавать правильное положение схвата. Кроме этого присоединенные координаты не пригодны в качестве рабочей системы координат еще и потому, что оси сочленений большинства манипуляторов не ортогональны, вследствие чего сложно описать положения и ориентации схвата. Если же в начальной и конечной точках траектории требуется знание присоединенных координат, их значения можно получить с помощью программы решения обратной задачи кинематики. Как правило, траектория, соединяющая начальное и конечное положения схвата, не является единственной.

На втором этапе определяются обобщенные координаты, обеспечивающие положение рабочего органа на заданной (программной) траектории [9, 14–16].

Существуют два основных подхода к планированию траекторий в декартовом пространстве. В первом из них большинство вычислений, оптимизация траекторий и последующее регулирование движения производятся в декартовых координатах. Узловые точки на заданной прямолинейной траектории в декартовом пространстве выбираются через фиксированные интервалы времени. Вычисление значений присоединенных координат в этих точках производится в процессе управления движением манипулятора.

Второй подход состоит в аппроксимации прямолинейных участков траектории в декартовом пространстве траекториями в пространстве присоединенных переменных, полученных в результате интерполяции траектории между соседними точками полинома низкой степени. Регулирование движения в этом подходе производится на уровне присоединенных переменных.

Поскольку управление роботом осуществляется в пространстве присоединенных переменных, а траектория движения задается в декартовом пространстве, обычно пользуются полиномиальной аппроксимацией для формирования заданной траектории в декартовом пространстве.

Основа этого способа – алгоритм формирования последовательности дополнительных узловых точек на заданной декартовой траектории при аппроксимации ее кривой траекторией. Для мобильного робота особое значение имеют управляемость и устойчивость движения.

Одной из самых простых и рентабельных систем управления является система дифференциального привода. Дифференциальный привод состоит из независимых друг от друга ведущих колес. Каждое ведущее колесо приводится в движение отдельным двигателем. Дифференциальный привод – это неголономная система, которая имеет ограничения в изменении положения робота.

У мобильного робота имеется шесть степеней подвижности. Три степени подвижности:  $x$ ,  $y$  и  $z$  – связаны с тремя координатными осями, позволяющими определить положение его в трехмерном пространстве. Остальные три степени подвижности относятся к ориентации робота в пространстве.

Робот с дифференциальным приводом, перемещающийся в двухмерной плоскости ( $2D$ ), и его положение в любой момент можно описать двумя глобальными координатами  $X$  и  $Y$ , лежащими в горизонтальной плоскости. При этом курс робота обозначается как  $\theta$ .

Цель работы – решение задачи кинематики мобильного колесного робота с учетом его конструктивных особенностей.

**Методика моделирования**

Дифференциальный привод четырехколесного робота обуславливает его положение изменением параметров базовой платформы (рис. 1, а). Такие роботы представляют собой систему из двух шарнирно сочлененных секций, которые могут поворачиваться друг относительно друга в горизонтальной плоскости. Изменяется направление движения робота с шарнирной платформой путем поворота секций друг относительно друга в горизонтальной плоскости на некоторый угол  $\alpha$ .

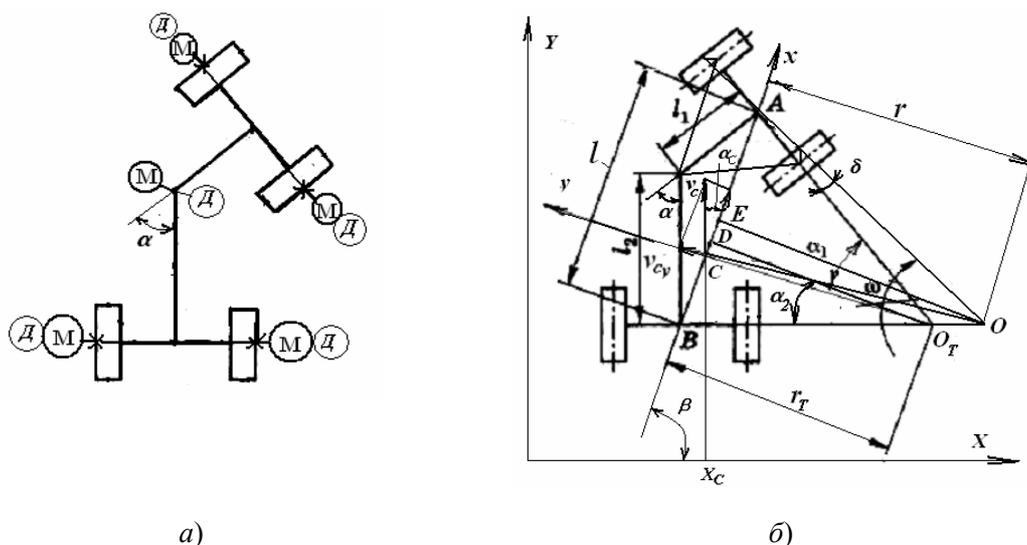


Рис. 1. Кинематическая (а) и расчетная (б) схемы

Рассмотренный способ поворота колесного робота имеет некоторые преимущества по сравнению со способом поворота полноприводных роботов при помощи управляемых колес: хорошую проходимость и маневренность, возможность получения малых радиусов поворота, а также уменьшение числа шарниров в трансмиссии, так как оси колес неподвижны по отношению к секциям. Существенными недостатками роботов с шарнирной платформой является их неустойчивость при движении на склонах и на повышенных скоростях.

Чтобы робот поворачивался с заданным радиусом, необходимо создать достаточную силу тяги ведущих колес, способную преодолеть возросшую по сравнению с существующей при прямолинейном движении силу сопротивления движению.

К кинематическим параметрам криволинейного движения робота относятся: радиус поворота, смещение центра поворота, угловые и линейные скорости движения колес, траектория движения и др. Это зависит от конструктивных и эксплуатационных факторов (базы робота, способа поворота, скорости их поворота, скорости движения, характеристик шин и грунта и т. п.).

Под радиусом поворота робота будем понимать кратчайшее расстояние от мгновенного центра поворота до продольной оси остова робота. Радиус поворота, определенный без учета явления бокового увода шин (жесткие в боковом направлении шины), является теоретическим и обозначается  $r_T$ . Радиус поворота, определенный с учетом явления увода, называют действительным и обозначают  $r$ .

Робота с шарнирной платформой можно представить как робота, имеющего изменяющуюся в процессе поворота базу  $l$ , передние и задние мосты которого повер-

нуты на углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно. Переменная длина базы робота рассчитывается по формуле

$$l = l_2 \sqrt{(\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos \alpha)}, \quad (1)$$

где  $\alpha$  – угловой управляемый параметр робота;

$$\lambda = \frac{l_1}{l_2}.$$

Влияние на длину переменной базы соотношения сочленений робота представлено на рис. 2, а, а угла поворота сочленений – на рис. 2, б.

Анализ рис. 1 позволяет установить, что такой робот обладает наибольшей чувствительностью к углу поворота в сочленении базы.

Из соотношения сторон управляемой платформы робота получим следующие зависимости, по которым можно определить углы расположения звеньев:

$$\alpha_1 = \arcsin\left(\frac{l_2}{l} \sin \alpha\right). \quad (2)$$

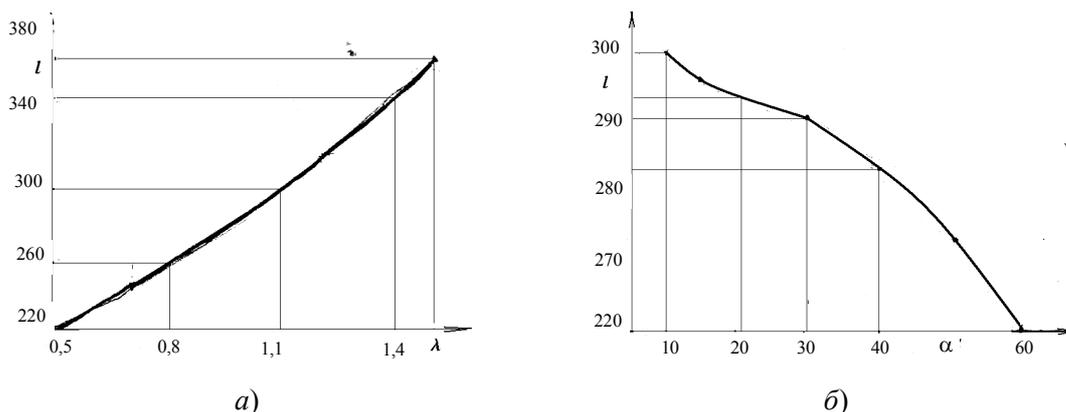


Рис. 2. Графики влияния  $\lambda$  (а) и  $\alpha$  (б) на межосевое расстояние

Теоретический радиус поворота робота с шарнирной платформой определяется с использованием расчетной схемы. Как видно на рис. 1, б:

$$l - r_T \operatorname{tg} \alpha_2 = r_T \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Откуда

$$r_T = \frac{l_2 \sqrt{(\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos \alpha)} \cos\left(\arcsin\left(\frac{\lambda l_2}{l} \sin \alpha\right)\right) \cos\left(\arcsin\left(\frac{l_2}{l} \sin \alpha\right)\right)}{\sin \alpha}. \quad (3)$$

Анализируя формулу (4), можно заключить, что робот с шарнирной платформой имеет меньший радиус поворота, чем робот со всеми управляемыми колесами при одинаковых базе и средних углах поворота управляемых колес [8]. При перемещении по грунту или на эластичных в боковом направлении шинах мгновенный центр поворота робота переместится из точки  $O_T$  в точку  $O$  (рис. 1, б), и радиус по-

ворота с учетом явления увода шин можно будет определить по следующему выражению:

$$r = \frac{l_2 \sqrt{(\lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos(\alpha + \delta)) \cos(\arcsin(\frac{\lambda l_2}{l} \sin(\alpha + \delta)))}}{\sin(\arcsin(\frac{\lambda l_2}{l} \sin \alpha) + \arcsin(\frac{\lambda l_1}{l} \sin \alpha) - \delta)}, \quad (4)$$

где  $\delta$  – изменение угла сочленения платформы от увода шин.

Исходя из формул (3), (4) сделаем вывод, что радиус поворота зависит от длины переменной базы робота, углов увода шин передних колес. Это означает, что на траекторию криволинейного движения робота оказывают влияние угол поворота сочленений базы, характеристики шин и грунта.

Поскольку углы увода колес влияют на радиус поворота, различают три вида поворачиваемости колесного робота:

- избыточная поворачиваемость – наблюдается, если при закрепленном переднем мосте с увеличением скорости движения радиус поворота робота уменьшается;
- недостаточная поворачиваемость – возникает, если при увеличении скорости движения возрастает радиус поворота робота с закрепленным передним мостом;
- нейтральная поворачиваемость – наблюдается, если радиус поворота не изменяется с усилением скорости движения робота с закрепленным передним мостом.

С точки зрения обеспечения движения робота с меньшими радиусами при заданных углах поворота звеньев избыточная поворачиваемость предпочтительнее. Однако при повороте робота с увеличением кривизны возрастает центробежная сила, а также увод шин, и соответственно это при избыточной поворачиваемости приведет к дальнейшему росту кривизны и центробежной силы. Такой процесс может стать необратимым, что нежелательно, а в некоторых случаях – ведет к опрокидыванию робота. Таким образом, наиболее рациональным соотношением углов бокового увода шин передних и задних колес будет такое, при котором обеспечивается некоторая недостаточная поворачиваемость робота. В этом случае движение робота устойчиво и при поворотах не приводит к большому увеличению радиуса поворота, т. е. не ухудшается его поворачиваемость.

Используя расчетную схему (рис. 1, б), можно определить проекции вектора скорости  $\bar{v}_C$  центра масс на оси подвижной системы координат:

$$v_{Cx} = v_C \cos \alpha_C; v_{Cy} = v_C \sin \alpha_C,$$

где  $v_{Cx}$  – скорость поступательного движения робота;  $v_{Cy}$  – скорость бокового смещения центра масс робота;  $\alpha_C$  – угол между вектором скорости  $\bar{v}_C$  – и продольной осью  $ox$ .

Как видно на рис. 1, б):

$$\operatorname{tg} \alpha_C = \frac{r \operatorname{tg} \left( \arcsin \left( \frac{l_2}{l} \sin \alpha \right) + \delta \right) - l_2}{r}. \quad (5)$$

Тогда проекции составляющих скорости  $v_C$  на оси неподвижной системы координат можно определить:

$$v_{Cx} = v_{Cx} \cos \beta - v_{Cy} \sin \beta;$$

$$v_{Cy} = v_{Cx} \sin \beta + v_{Cy} \cos \beta.$$

Выполнив дифференцирование по времени скоростей  $v_{Cx}$  и  $v_{Cy}$ , получим ускорения центра масс робота в неподвижной системе координат:

$$\begin{aligned} a_{Cx} &= \dot{v}_{Cx} \cos \beta - v_{Cx} \omega \sin \beta - \dot{v}_{Cy} \sin \beta - v_{Cy} \omega \cos \beta; \\ a_{Cy} &= \dot{v}_{Cx} \sin \beta - v_{Cx} \omega \cos \beta + \dot{v}_{Cy} \cos \beta - v_{Cy} \omega \sin \beta, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\dot{v}_{Cx}$  – ускорение при поступательном движении робота;  $\dot{v}_{Cy}$  – ускорение бокового смещения центра масс робота;  $\omega$  – угловая скорость поворота робота.

Для определения искомым ускорений центра масс робота в подвижной системе координат спроецируем векторы ускорений  $\bar{a}_{Cx}$  и  $\bar{a}_{Cy}$  на подвижные оси  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} a_{Cx} &= a_{Cx} \cos \beta + a_{Cy} \sin \beta; \\ a_{Cy} &= -a_{Cx} \sin \beta + a_{Cy} \cos \beta. \end{aligned}$$

С учетом соотношений (6) после преобразований получим:

$$a_{Cx} = \dot{v}_{Cx} - v_{Cy} \omega; \quad a_{Cy} = v_{Cx} \omega + \dot{v}_{Cy}. \quad (7)$$

Найдем выражения для определения скорости и ускорения бокового смещения центра масс робота. В соответствии с рис. 1, б:

$$v_{Cy} = v_{Cx} \operatorname{tg} \alpha_c = \frac{v_{Cx} r \operatorname{tg} \left( \arcsin \left( \frac{l_2}{l} \sin \alpha \right) + \delta \right) - l_2}{r}. \quad (8)$$

Тогда при малых углах поворота получим:

$$\begin{aligned} a_{Cx} &= \dot{v}_{Cx} - \frac{v_C^2}{r} \left[ \frac{l_2}{r} - \left( \arcsin \left( \frac{l_2}{l} \sin \alpha \right) + \delta \right) \right]; \\ a_{Cy} &= \frac{v_C^2}{r} + \dot{v}_C \left[ \frac{l_2}{r} - \left( \arcsin \left( \frac{l_2}{l} \sin \alpha \right) + \delta \right) \right] + \frac{v_C}{l} \left[ l_2 (\dot{\alpha}_1 - \varpi_{1\delta}) - \lambda l_2 \left( \arcsin \left( \frac{l_2}{l} \sin \alpha \right) + \varpi_{2\delta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Угловое ускорение робота

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{1}{l} \left[ \dot{v}_c \left( \arcsin \left( \frac{l_1}{l} \sin \alpha \right) + \arcsin \left( \frac{l_2}{l} \sin \alpha - \delta \right) + \arcsin \left( \frac{l_1}{l} \sin \alpha \right)' + \arcsin \left( \frac{l_2}{l} \sin \alpha \right)' - \varpi_{1\delta} + \varpi_{2\delta} \right) \right]. \quad (10)$$

### Заключение

Таким образом, явление бокового увода шин оказывает существенное влияние на кинематику поворота колесного робота, вызывая изменение действительного радиуса поворота по сравнению с радиусом поворота робота с жесткими в боковом направлении колесами, смещение центра поворота и при возвратно-вращательном движении в сочленении с шарниром повысит проходимость робота по песчанникам.

## Литература

1. Асфаль, Р. Роботы и автоматизация производства / Р. Асфаль ; пер. с англ. М. Ю. Евстигнеева. – М. : Машиностроение, 1989. – 446 с.
2. Афонин, В. Л. Интеллектуальные робототехнические системы : курс лекций / В. Л. Афонин, В. А. Макушкин. – М. : Интернет-ун-т информ. технологий, 2009. – 199 с.
3. Белоусов, И. Р. Управление роботами через сеть Интернет / И. Р. Белоусов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2002. – № 2 (383). – С. 198–201.
4. Виттенбург, И. С. Динамика систем твердых тел / И. С. Виттенбург ; пер. с англ. В. Н. Рубановского. – М. : Мир, 1980. – 292 с.
5. Воробьев, Е. И. Анализ кинематики пространственных исполнительных механизмов манипуляторов методом матриц / Е. И. Воробьев // Механика машин. – 1970. – Вып. 53. – С. 8–16.
6. Воробьев, Е. И. Механика промышленных роботов : в 3 кн. / Е. И. Воробьев, О. Д. Егоров, С. А. Попов. – М. : Высш. шк., 1988. – Кн. 1. Кинематика и динамика. – 304 с.
7. Крахмалев, О. Н. Методика анализа влияния сил инерции на динамику манипуляционных роботов / О. Н. Крахмалев // Теория механизмов и машин. – 2012. – № 2 (20), т. 10. – С. 41–53.
8. Булгаков, А. Г. Промышленные роботы. Кинематика, динамика, контроль и управление / А. Г. Булгаков, В. А. Воробьев. – М. : СОЛОН-ПРЕСС, 2012. – 485 с.
9. Верещагин, А. Ф. Планирование траектории исполнительного органа манипуляционного робота / А. Ф. Верещагин, В. Л. Геперозов // Известия академии наук СССР. Техническая кибернетика. – 1978. – № 2. – С. 76–87.
10. Вертю, Ж. Телеуправление роботами с помощью ЭВМ / Ж. Вертю, Ф. Куафе ; пер. с фр. В. Б. Тарасова. – М. : Мир, 1989. – 198 с.
11. Воробьев, Е. И. Синтез механизмов по заданному движению твердого тела в пространстве / Е. И. Воробьев // Механика машин. – 1978. – Вып. 54. – С. 25–33.
12. Механика миниатюрных роботов / В. Г. Градецкий, М. М. Князьков, Л. Ф. Фомин, В. Г. Чашухин. – М. : Наука, 2010. – 265 с.
13. Медведев, В. П. Синтез оптимального управления приводами манипулятора / В. П. Медведев // Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации : сб. тр. 12-го Междунар. научн.-техн. семинара / Тамб. гос. технол. ун-т. – М., 2003. – С. 133.
14. Гречановский, Е. Н. Метод планирования движения манипулятора при наличии препятствий / Е. Н. Гречановский, И. Ш. Пинскер // Модели. Алгоритмы. Принятие решения / Е. Н. Гречановский, И. Ш. Пинскер. – М. : Наука, 1979. – С. 100–142.
15. Пол, Р. Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора / Р. Пол. : пер. с англ. А. Ф. Верещагина, В. Л. Генерозова. – М. : Наука, 1976. – 103 с.
16. Luh, J. On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators / J. Y. S. Luh, M. W. Walker, R. P. C. Paul // ASME. – 1980. – Vol. 102. – P. 69–76.

## References

1. Asfal' R. *Robots and manufacturing automation*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989. 446 p. (in Russian).
2. Afonin V. L. *Intellektual'nye robototekhnicheskie sistemy*. Moscow, Internet universitet informacionnyh tehnologij, 2009. 199 p. (in Russian).
3. Belousov I. R. Upravlenie robotami cherez set' Internet. *Doklady NAN Belarusi*, 2002, no. 2 (383), pp. 198–201 (in Russian).
4. Vittenburg J. S. *Dinamika sistem tverdyh tel*. Moscow, Mir Publ., 1980. 292 p. (in Russian).
5. Vorob'ev E. I. Analiz kinematiki prostranstvennyh ispolnitel'nyh mekhanizmov manipulyatorov

- metodom matric. *Mekhanika mashin*, 1970, iss. 53, pp. 8–16 (in Russian).
6. Vorob'ev E. I. *Mekhanika promyshlennyh robotov*. Moscow, Vyshnejshaja shkola publ., 1988, book 1, Kinematika i dinamika. 304 p. (in Russian).
  7. Krahmalev O. N. Metodika analiza vliyaniya sil inercii na dinamiku manipulyacionnyh robotov. *Teo riya mekhanizmov i mashin*, 2012, no. 2 (20), vol. 10, pp. 41–53 (in Russian).
  8. Bulgakov A. G. *Promyshlennye roboty. Kinematika, dinamika, kontrol' i upravlenie*. Moscow, SOLON-PRESS Publ., 2012. 485 p. (in Russian).
  9. Vereshchagin A. F. Planirovanie traektorii ispolnitel'nogo organa manipulyacionnogo robota. *Izvestija Akademii nauk SSSR. Tehnicheskaja kibernetika*, 1978, no. 2, pp. 76–87 (in Russian).
  10. Vertyu Z. H. *Teleupravlenie robotami s pomoshch'yu EVM*. Moscow, Mir Publ., 1989. 198 p. (in Russian).
  11. Vorob'ev E. I. Sintez mekhanizmov po zadannomu dvizheniyu tverdogo tela v prostranstve. *Mekhanika mashin*, Moscow, 1978, iss. 54, pp. 25–33 (in Russian).
  12. Gradeckij V. G., Knyaz'kov M. M., Fomin L. F., Chashchuhin V. G. *Mekhanika miniatyurnyh robotov*. Moscow, Nauka Publ., 2010, 265 p. (in Russian).
  13. Medvedev V. P. Sintez optimal'nogo upravleniya privodami manipulyatora. *Sovremennye tehnologii v zadachah upravleniya, avtomatiki i obrabotki informacii. Sb. tr. 12-go Mezhdunar. nauchn.-tehn. Seminara*. Moscow, Tambovskij gosudarstvennyj tehniceskij universitet, 2003, 133 p. (in Russian).
  14. Grechanovskij E. N. Metod planirovaniya dvizheniya manipulyatora pri nalichii prepyatstvij. *Modeli. Algoritmy. Prinyatie resheniya*. Moscow, Nauka Publ., 1979. pp. 100–142 (in Russian).
  15. Pol R. *Modelirovanie, planirovanie traektorij i upravlenie dvizheniem robota-manipulyatora*. Moscow, Nauka Publ., 1976. 103 p. (in Russian).
  16. Luh J. On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators. *ASME*, 1980, vol. 102. pp. 69–76.

Поступила 16.10.2024