Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 3

ФИЗИКА

И. Г. ФИХТЕНГОЛЬЦ

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА ИНЕРЦИИ СИСТЕМЫ КОНЕЧНЫХ МАСС В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

(Представлено академиком В. А. Фоком 20 XI 1948)

В 1941 г. В. А. Фок указал вид интегралов движения центра инерции системы двух конечных масс в общей теории относительности ([1]).

Результаты В. А. Фока могут быть обобщены на случай системы любого числа n конечных масс.

Следуя В. А. Фоку, мы будем пользоваться гармоническими координатами x, y, z, t, которые по своим свойствам ближе всего соответствуют декартовым координатам и времени частной теории относительности.

Для решения поставленной задачи необходимо воспользоваться уравнениями движения для системы конечных масс, полученными в работе Н. М. Петровой ([2]). Выписывая эти уравнения, мы несколько изменим обозначения с тем, чтобы приблизить их к обычным ньютоновским, принятым в цитированной работе В. А. Фока.

Обозначая радиус-вектор центра инерции массы m_i через $\mathbf{r}_i$ (с составляющими x_i, y_i, z_i в момент времени t) и отмечая производные по времени от этих функций точками сверху, мы можем уравнения движения для системы конечных масс записать в виде:

$$m_i\ddot{x}_i + \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} + \frac{1}{c^2}\left(\dot{\mathbf{r}}_i^2 - 4\sum_k{}' \frac{\gamma m_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} -$$

$$-\frac{4}{c^2}\,\dot{x}_i(\dot{\mathbf{r}}_i\operatorname{grad}_i\Phi) + \frac{1}{c^2}\sum_k{}'\left\{\frac{7}{2}\frac{\gamma m_i}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} +\right.$$

$$+\frac{\gamma m_i}{2}\frac{x_i - x_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^3}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k\operatorname{grad}_k\Phi) - \frac{\gamma m_i m_k}{2}(\mathbf{r}_k\operatorname{grad}_k)^2\frac{x_i - x_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} +$$

$$+\gamma m_i m_k\frac{x_i - x_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}\left[\frac{3}{2}\dot{\mathbf{r}}_k^2 - 4(\dot{\mathbf{r}}_i\dot{\mathbf{r}}_k) - \sum_l{}'\frac{\gamma m_l}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|}\right] +$$

$$\left.+\frac{\gamma m_i m_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^3}[4\dot{x}_k(\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) - 4\dot{x}_k(\dot{\mathbf{r}}_k\cdot\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) + 3\dot{x}_i(\dot{\mathbf{r}}_k\cdot\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)]\right\} \qquad (1)$$

и аналогично для компонент y и z. В этих уравнениях* Φ есть потенциальная энергия всей системы тел:

$$\Phi = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,\ k \\ (i \neq k)}} \frac{\gamma m_i m_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}, \tag{2}$$

так что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum_k{}' \frac{\gamma m_i m_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^3} (x_i - x_k). \tag{3}$$

Введем по формулам ньютоновой механики координаты центра инерции $\mathbf{r}_0 (x_0,\ y_0,\ z_0)$, т. е. положим

$$M x_0 = \sum_i m_i x_i,$$

где

$$M = \sum_i m_i,$$

и просуммируем (1) по всем массам. Тогда после упрощения получим:

$$M\ddot{x}_0 = \frac{1}{2c^2} \sum_i \left\{ \dot{\mathbf{r}}_i^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \sum_k{}' \left[\frac{\gamma m_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \right.\right.$$

$$+ \gamma m_i \frac{x_i - x_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k \operatorname{grad}_k \Phi) - \gamma m_i m_k (\dot{\mathbf{r}}_k \operatorname{grad}_k \Phi)^2 \frac{x_i - x_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} +$$

$$\left.\left. + 2 \frac{\gamma m_i m_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} \dot{x}_k (\dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \right] \right\} \tag{3}$$

и аналогично для y_0 и z_0.

Перейдем теперь в правой части уравнения (4) к ньютонову приближению, т. е. положим там

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \ \ldots \quad \text{и т. д.}$$

Тогда, после ряда преобразований, которые мы здесь опускаем, удается представить правую часть уравнения (4) в виде второй производной по времени, а именно:

$$M\ddot{x}_0 = K_x + L_x, \tag{5}$$

где

$$K_x = -\frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i x_i \dot{\mathbf{r}}_i^2, \tag{6}$$

$$L_x = \frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i \neq k} \frac{\gamma m_i m_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} x_i. \tag{7}$$

После этого уже ясно, что на случай системы любого числа конечных масс полностью переносятся утверждения, первоначально

* Штрих у суммы подчеркивает, что индекс суммирования принимает все значения от 1 до n, кроме одного.

высказанные В. А. Фоком для случая движения центра инерции системы двух масс.

Так, если мы введем вектор R с составляющими X, Y, Z, определяемыми из уравнения

$$MX = \sum m_i x_i \left[1 + \frac{\dot{\mathbf{r}}_i^2}{2c^2} - \frac{1}{2c^2} \sum_k{}' \frac{\gamma m_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}\right] \tag{8}$$

и из аналогичных уравнений для Y и Z, то будем иметь:

$$\frac{d^2X}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2Y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2Z}{dt^2} = 0,$$

следовательно, величины X, Y, Z представляют собой вторые интегралы уравнений движения системы тел. Это дает право называть величины X, Y, Z (совпадающие в ньютоновом приближении с x_0, y_0, z_0) координатами центра инерции в обобщенном смысле.

Очевидно, что интегралы центра инерции вида (8) должны существовать в любой гармонической координатной системе. В частности, если мы сместим начало координат вдоль оси x на величину a, т. е. произведем в формуле (8) замену

$$x_i \to x_i + a,$$

то величина MX заменится на

$$MX' = MX + a\left(M + \frac{E}{c^2}\right), \tag{9}$$

где

$$M = \sum_i m_i$$

есть сумма масс, а

$$E = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \Phi$$

полная энергия в ньютоновом приближении. Так как множитель при a есть величина постоянная, то новое выражение будет также интегралом движения.

Можно выбрать координатную систему так, чтобы выражение (9) обратилось в нуль. Мы получим тогда закон движения центра инерции в обычном смысле.

Относительно других заключений, которые можно было бы вывести из полученных нами результатов, мы отсылаем читателя к многократно цитированной работе В. А. Фока.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность акад. В. А. Фоку за внимание к настоящей работе, которая выполнена по его предложению.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
10 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Фок, ДАН, **32**, 28 (1941). [2] Н. М. Петрова, Об уравнениях движения и тензоре материи для системы конечных масс в общей теории относительности, Кандидатская диссертация, ЛГУ, 1940.