Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

О. И. ПАНЫЧ

О ПРИБЛИЖЕННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 2 XII 1949)

Ввиду трудностей, связанных с точным решением задач дифракции, за последнее время рядом авторов ([2-5]) было плодотворно использовано приближенное краевое условие, предложенное М. А. Леонтовичем ([1], [6], [7]), которое дает возможность находить электромагнитное поле только вне дифрагирующего тела (как и в случае идеального проводника) и в то же время приближенно учитывает конечную проводимость экрана. Так как сравнение точного решения с приближенным в общем виде не проводилось, нами, по предложению чл.-корр. АН СССР А. Н. Тихонова, было проведено асимптотическое разложение точного решения по малому параметру $1/k_i$ (где k_i — волновое число в металле) и показано, что частные суммы этого разложения могут быть определены как решения краевых задач только для внешнего пространства с некоторыми краевыми условиями, которые мы будем называть условиями Леонтовича, соответственно 1-го, 2-го, 3-го порядка; условия более высоких порядков принципиально могут быть получены тем же методом, однако это приводит к громоздким вычислениям. В § 1 мы излагаем метод на примере скалярного волнового уравнения, в § 2 — результаты применения того же метода к уравнениям электродинамики. Заметим, что полученные нами приближенные условия совпадают с таковыми, полученными в работе ([1]).

§ 1. Пусть задано некоторое ограниченное тело T_i с поверхностью S, погруженное в неограниченное пространство. Рассмотрим следующую задачу: требуется найти функцию $u(\mathbf{r})$, удовлетворяющую волновому уравнению:

$$\begin{aligned} &\Delta u + k_e^2 u = -\rho \quad \text{вне } T_i \text{ (обл. } T_e), \\ &\Delta u + k_i^2 u = 0 \qquad \text{в } T_i \end{aligned} \tag{1,1}$$

(k_e действительно, $k_i = \delta + i\gamma$), краевым условиям:

$$u_i\big|_S = u_e\big|_S, \qquad \left.\frac{\partial u_i}{\partial n}\right|_S = \left.\frac{\partial u_e}{\partial n}\right|_S \tag{1,2}$$

и условиям излучения ([8], [9]).

Нашей задачей будет исследовать характер решения при больших положительных значениях γ.

Предположим, что поверхность S является поверхностью типа Ляпунова. Используя метод представления решения, на который обратил наше внимание А. Н. Тихонов, положим:

$$u_i(P)=\int_S \mu(Q)\psi_i(P,Q)\,dS_Q, \quad \psi_i(P,Q)=\frac{e^{ik_i R(P,Q)}}{R(P,Q)}, \tag{1,3}$$

$$u_e(P)=u_0(P)+\int_S \mu(Q)\psi_i(P,Q)\,dS_Q+$$
$$+(k_e^2-k_i^2)\int_{T_e} G(P,Q')\,d\tau_{Q'}\int_S \mu(Q)\psi_i(Q',Q)\,dS_Q=$$
$$=u_0(P)+\int_S \frac{\partial G(P,Q')}{\partial n_{Q'}}\,dS_{Q'}\int_S \mu(Q)\psi_i(Q',Q)\,dS_Q. \tag{1,4}$$

Здесь $G(P, Q)$ — функция Грина первой краевой задачи, удовлетворяющая условиям излучения; $G|_S=0$,

$$u_0(P)=\int_{T_e} G(P,Q)\rho(Q)\,d\tau_Q. \tag{1,5}$$

Легко проверить, что при таком представлении решения выполняется первое краевое условие и условие излучения.

Из второго краевого условия получается интегральное уравнение для μ:

$$\mu(P)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial u_0}{\partial n}+\int_S \Pi(P,Q)\mu(Q)\,dS_Q, \tag{1,6}$$

$$\Pi(P,Q)=\frac{k_e^2-k_i^2}{4\pi}\int_{T_e}\frac{\partial G(P,Q')}{\partial n_P}\psi_i(Q',Q)\,d\tau_{Q'},$$

или

$$\mu(P)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial u_0}{\partial n}+\frac{1}{2\pi}\int_S \mu(Q)\frac{\partial\psi_i(P,Q)}{\partial n}\,dS_Q+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_P}\int_S \frac{\partial G(P,Q')}{\partial n_{Q'}}\,dS_{Q'}\int_S \mu(Q)\psi_i(Q',Q)\,dS_Q. \tag{1,7}$$

Нами установлено, что уравнение (1,6), а следовательно и (1,7), разрешимо. Для получения асимптотического разложения нами сделано еще одно предположение: функция $v(\mathbf{r}, \gamma)$, определенная волновым уравнением:

$$\Delta v+k_e^2 v=0 \quad \text{в} \quad T_e, \qquad \Delta v+k_i^2 v=0 \quad \text{в} \quad T_i, \tag{1,8}$$

краевыми условиями:

$$v_i\big|_S=v_e\big|_S, \qquad \frac{\partial v_i}{\partial n}\Big|_S=\frac{\partial v_e}{\partial n}\Big|_S+f \tag{1,9}$$

и условием излучения, имеет предел при $\gamma\to+\infty$, также $\partial v_i/\partial n$ и $\partial v_e/\partial n$, если f имеет предел при $\gamma\to+\infty$.

Необходимость существования этих пределов очевидна, нами показана достаточность. Выяснением условий, при которых это имеет место, мы здесь заниматься не будем.

В дальнейшем нам придется пользоваться установленными нами асимптотическими формулами для интегралов:

$$I_1 = \int_S f(Q)\psi_i(P, Q)\,dS_Q\,, \quad I_2 = \int_S f(Q)\frac{\partial \psi_i(P, Q)}{\partial n}\,dS_Q$$

(точка P лежит на S):

$$I_1 \approx -\frac{2\pi}{ik_i} f(P) + \frac{\pi}{ik_i^3}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial l^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial m^2} + \frac{(\varkappa_1 - \varkappa_2)^2}{4} f\right]; \tag{1,10}$$

$$I_2 \approx -\frac{2\pi}{ik_i^3}\overline{\varkappa} f\,(P) + \frac{2\pi}{ik_i^3}\left[\frac{3\varkappa_1 + \varkappa_2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial l^2} + \frac{\varkappa_1 + 3\varkappa_2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial m^2} - 3\overline{\varkappa^3} f\right]. \tag{1,11}$$

Здесь: $\varkappa_1$ — максимальная кривизна поверхности в точке P; $\varkappa_2$ — минимальная кривизна; $\overline{\varkappa} = \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}$ — средняя кривизна; $\overline{\varkappa^3}$ — средняя кубическая кривизна; (l, m) — прямоугольные координаты в касательной плоскости, направленные по главным линиям кривизны.

Пользуясь соотношением (1,7) как тождеством и формулами (1,10), (1,11), мы получим разложение μ по степеням $1/k_i$. Затем, подставляя полученное разложение μ в (1,3), мы получим асимптотическое разложение $u|_S$; сравнивая его с полученным аналогичным образом разложением $\partial u/\partial n|_S$, получим приближенные краевые условия.

Условие 1-го порядка:

$$u\Big|_S = -\frac{1}{ik_i}\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S. \tag{1,12}$$

Условие 2-го порядка:

$$u\Big|_S = -\frac{1}{ik_i}\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S\left(1 - \frac{\overline{\varkappa}}{ik_i}\right). \tag{1,13}$$

Условие 3-го порядка:

$$u\Big|_S = -\frac{1}{ik_i}\left\{\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S\left[1 - \frac{\overline{\varkappa}}{ik_i} - \left(\frac{\overline{\varkappa}}{k_i}\right)^2 - \frac{(\varkappa_1 - \varkappa_2)^2}{8k_i^2}\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2k_i^2}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial m^2}\right)\right\}. \tag{1,14}$$

§ 2. Рассмотрим теперь дифракцию электромагнитных волн на теле T_i. Математически эта задача, как известно, сводится к интегрированию уравнений электродинамики:

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{i\omega}{c}\mathbf{H}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -\frac{i\omega}{c}\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}, \\ \operatorname{div}\mathbf{E} = \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \quad \text{в } T_e; \end{gathered} \tag{2,1}$$

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{i\omega\mu}{c}\mathbf{H}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -\frac{i\omega\varepsilon}{c}\mathbf{E} + \frac{4\pi\delta}{c}\mathbf{E}, \\ \operatorname{div}\mathbf{E} = \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \quad \text{в } T_i \end{gathered} \tag{2,2}$$

при краевых условиях:

$$\mathbf{E}_t^{(i)}\big|_S = \mathbf{E}_t^{(e)}\big|_S, \quad \mathbf{H}_t^{(i)}\big|_S = \mathbf{H}_t^{(e)}\big|_S \tag{2,3}$$

и при условиях излучения.

Представляя решение аналогично тому, как это было сделано в § 1:

$$\mathbf{E}^{(i)} = \int\limits_S \vec{\alpha}(Q)\,\psi_i(P, Q)\,dS_Q\,; \tag{2,4}$$

$$\mathbf{E}^{(e)} = \mathbf{F} + \int\limits_S \frac{\partial G(P, Q')}{\partial n_{Q'}}\,dS_{Q'}\,.\int\limits_S \vec{\alpha}(Q)\,\psi_i(Q', Q)\,dS_Q +$$

$$+ \left(\frac{k_i^2}{k_e^2\mu} - 1\right)\int\limits_S \frac{\partial G(P, Q')}{\partial n_{Q'}}\,dS_{Q'}\,\mathbf{n}_{Q'}\left(\mathbf{n}_{Q'}\int\limits_S \vec{\alpha}(Q)\,\psi_i(Q', Q)\,dS_Q\right), \tag{2,5}$$

где

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi i\omega}{c}\int\limits_{T_e} G(P, Q)\,\mathbf{J}(Q)\,d\tau_Q\,,$$

мы получим для $\vec{\alpha}$ интегральное уравнение.

При предположениях, аналогичных сделанным в § 1, мы получим для $\vec{\alpha}$ асимптотическое разложение, из которого затем получим разложения $\mathbf{E}|_S$, $\mathbf{H}|_S$, $\partial\mathbf{E}/\partial n|_S$; сравнивая соответствующие члены этих разложений, мы получим условия Леонтовича (мы выписываем сразу условия 2-го порядка для $\mathbf{E}_t$ и E_n):

$$E_l\Big|_S = -\frac{k_e\,\mu}{k_i}\left(1 + \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{2ik_i}\right)H_m\Big|_S, \tag{2,6}$$

$$E_m\Big|_S = +\frac{k_e\,\mu}{k_i}\left(1 + \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{2ik_i}\right)H_l\Big|_S\,;$$

$$\frac{\partial E_n}{\partial n}\Big|_S + 2\bar{\varkappa}\,E_n\Big|_S = -\frac{ik_e^2\mu}{k_i}\left(1 - \frac{\bar{\varkappa}}{ik_i}\right)E_n\Big|_S. \tag{2,7}$$

В заключение заметим, что условия применимости формул (1,12), (1,13), (1,14), (2,6), (2,7), сформулированные в работе ([1]), могут быть также получены из изложенных выше результатов.

Научно-исследовательский институт физики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Поступило 1 XII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Леонтович, Исследования по распространению радиоволн, сб. 2, изд. АН СССР, 1948, стр. 5. [2] М. А. Леонтович и В. А. Фок, там же, стр. 19. [3] В. А. Фок, там же, стр. 70. [4] Г. А. Гринберг и В. А. Фок, там же, стр. 69. [5] Е. Л. Фейнберг, там же, стр. 97. [6] С. М. Рытов, ЖЭТФ, 10, 180, в. 2 (1940). [7] Я. Л. Альперт, ЖТФ, 10, в. 16, 1358 (1940). [8] A. Sommerfeld, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver., 21, 309 (1912). [9] А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, ЖЭТФ, в. 2, 243 (1948).