Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Действительный член АН УССР Г. Н. САВИН и О. С. ПАРАСЮК

О НЕКОТОРЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ С ЛИНЕЙНЫМ УПРОЧНЕНИЕМ

I. Рассмотрим основные уравнения пластичности в форме Генки [1] (плоская деформация) без учета сжимаемости материала:

$$e_{xx} = \frac{\psi}{2G}(\sigma_x - \sigma), \quad e_{yy} = \frac{\psi}{2G}(\sigma_y - \sigma), \quad e_{zz} = \frac{\psi}{2G}(\sigma_z - \sigma) = 0, \tag{1}$$

$$\sigma_z = {}^1/_2(\sigma_x + \sigma_y) = \sigma.$$

Если обозначить через E интенсивность деформации, S — интенсивность касательного напряжения, то из (1) следует $E = \frac{\psi}{G}S$. Если принять, что имеет место линейное упрочнение $S = k(mE + \mu)$ и если положить $n = km/G$, $n + \mu = 1$, тогда [4]

$$\psi = \frac{1}{n}\left[1 - \frac{\mu k}{S}\right]. \tag{2}$$

Компоненты деформации должны удовлетворять условию совместности

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x\,\partial y}, \tag{3}$$

а компоненты напряжений — уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Поставим задачу о нахождении всех тех компонент напряжений, которые одновременно решают плоскую задачу теории упругости и плоскую задачу теории пластичности с линейным упрочнением. Тогда к уравнениям равновесия (4) мы должны добавить еще условие

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \tag{5}$$

Взяв компоненты напряжений в виде

$$\sigma_x = \omega(x, y) - K(x, y)\cos\varphi(x, y), \quad \sigma_y = \omega(x, y) + K(x, y)\cos\varphi(x, y), \tag{6}$$

$$\tau_{xy} = K(x, y)\sin\varphi(x, y)$$

и подставив их в (4), (5), получим

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)K\cos\varphi=-2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}K\sin\varphi,$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)K\sin\varphi=2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}K\cos\varphi. \tag{7}$$

Так как в нашем случае $S=K$, то, вычисляя компоненты деформации по формулам (1) и подставляя их в условие (3), получим, приняв во внимание уравнения (7), соотношение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\cos\varphi=-2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\sin\varphi. \tag{8}$$

Таким образом, наша задача заключается в нахождении всех функций $K(x, y)$ и $\varphi(x, y)$, удовлетворяющих системе (7), (8).

Рассмотрим один специальный случай решений системы (7), (8). Для этого заметим, что система (7) может быть, если принять во внимание (8), представлена в виде

$$\frac{\partial^2K}{\partial y^2}-\frac{\partial^2K}{\partial x^2}+2\frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+2\frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=$$
$$=K\sin\varphi\left[\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\cos\varphi-\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sin\varphi\right],$$
$$2\frac{\partial^2K}{\partial x\,\partial y}-2\frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+2\frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}= \tag{9}$$
$$=-K\cos\varphi\left[2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\cos\varphi-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sin\varphi\right].$$

Наложим дополнительное условие на функцию $\varphi(x, y)$:

$$2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\cos\varphi-\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sin\varphi=0. \tag{10}$$

Тогда система (9) будет:

$$K_{yy}-K_{xx}+2K_y\varphi_x+2K_x\varphi_y=0,\quad 2K_{xy}-2K_y\varphi_y+2K_x\varphi_x=0. \tag{11}$$

С другой стороны, общее решение уравнений (8) и (10) известно и равно:

$$\varphi(x, y)=-2\operatorname{arc\,tg}(y/x)-2\alpha,\quad \text{или}\quad \varphi(x, y)=\mathrm{const}, \tag{12}$$

где α — некоторая постоянная.

Условие совместности системы (11) будет

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)M=2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}L, \tag{13}$$

где $L=2K_y\varphi_x+2K_x\varphi_y$, $M=-2K_y\varphi_y+2K_x\varphi_x$, и легко проверить, что оно выполняется тождественно, если $\varphi(x, y)$ гармоническая функция. Это дает возможность получить соотношение

$$K_{xx}+K_{yy}=2ae^{-\psi(x, y)}, \tag{14}$$

где $\psi(x, y)$ — функция, гармонически сопряженная с функцией $\varphi(x, y)$; в нашем конкретном случае равная $\psi(x, y)=\ln(x^2+y^2)$.

Легко показать, что самое общее решение системы (11) имеет вид

$$K(x, y)=\frac{ny-mx}{x^2+y^2}+\frac{a}{2(x^2+y^2)}+c, \tag{15}$$

где a, m, n, c — вещественные постоянные.

Приравняв $K(x, y)$ постоянной пластичности k, получим уравнение контура, отделяющего упругую зону от пластической. Деформации в пластической зоне определяются по формулам (1), а в упругой зоне по обычному закону Гука.

Для уяснения физического смысла полученного решения достаточно вычислить

$$\sigma_y - \sigma_x + 2\tau_{xy}i = 2K(x, y)(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$= \left[\frac{\bar{z}(-m+in) - z(m+in)}{z^2} + \frac{a}{z^2} + \frac{c\bar{z}}{z}\right]e^{-2i\alpha}. \quad (16)$$

Если в (16) положить: 1) $a=0$, $\alpha=0$, $c=0$, то получим случай сосредоточенной силы в полуплоскости, указанный раньше К. Н. Шевченко ([4]); 2) $m=n=c=0$ — получаем случай сосредоточенной пары в плоскости ([3]).

II. Предположим, что функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0. \quad (17)$$

Оказывается, что при этом предположении функция $K(x, y)$ всегда будет существовать. В самом деле, подставляя компоненты напряжений (6) в уравнения равновесия (4) и сравнивая вторые производные функции $K(x, y)$, получим:

$$K(x, y)(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) = [2\omega_y\varphi_y - 2\omega_x\varphi_x - 2\omega_{xy}]\cos\varphi +$$
$$+ [2\omega_y\varphi_x + 2\omega_x\varphi_y + \omega_{yy} - \omega_{xx}]\sin\varphi. \quad (18)$$

Если это соотношение будет выполнено тождественно, то $K(x, y)$ будет существовать. Для этого достаточно, в силу (17), чтобы

$$2\omega_y\varphi_y - 2\omega_x\varphi_x - 2\omega_{xy} = 0, \quad 2\omega_y\varphi_x + 2\omega_x\varphi_y + \omega_{yy} - \omega_{xx} = 0. \quad (19)$$

Но эта система по внешней форме тождественна с системой (11) и поэтому всегда совместна, если $\varphi(x, y)$ — гармоническая функция. Таким образом, нужно найти решения системы двух уравнений:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\cos\varphi = -2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\sin\varphi; \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (21)$$

Однако удобнее заменить уравнение (20) уравнением

$$2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\cos\varphi - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sin\varphi = 0, \quad (22)$$

если добавить к функции $\varphi(x, y)$ постоянную $\pi/2$. Уравнение (22) при этом может быть записано в виде:

$$[\varphi_{yy} - \varphi_{xx} + 2\varphi_x\varphi_y]\cos\varphi + [2\varphi_{xy} + \varphi_x^2 - \varphi_y^2]\sin\varphi = 0. \quad (23)$$

Возьмем теперь следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} 2\varphi_{yy} = -2\varphi_x\varphi_y - ae^{-\psi}\sin\varphi, \quad 2\varphi_{xx} = 2\varphi_x\varphi_y + ae^{-\psi}\sin\varphi, \\ 2\varphi_{xy} = \varphi_y^2 - \varphi_x^2 + ae^{-\psi}\cos\varphi, \quad \psi_x = -\varphi_y, \quad \psi_y = \varphi_x. \end{gathered} \quad (24)$$

Если $\varphi(x, y)$ удовлетворяет системе (24), то она удовлетворяет уравнениям (23) и (21). В этом можно просто убедиться, исключая функцию $\psi(x, y)$ из (24).

Система уравнения (24) может быть приведена к квадратурам. Для этой цели перепишем систему (24) в виде:

$$2dp - 2r\,dx - 2s\,dy = 0, \quad 2dq - 2s\,dx - 2t\,dy = 0,$$
$$d\varphi - p\,dx - q\,dy = 0, \quad d\psi + q\,dx - p\,dy = 0. \tag{25}$$

Принимая во внимание (24) и (25), находим:

$$2dp + p\,d\psi - q d\varphi - ae^{-\psi}\sin\varphi\,dx - ae^{-\psi}\cos\varphi\,dy = 0,$$
$$2dq + p\,d\varphi + q\,d\psi - ae^{-\psi}\cos\varphi\,dx + ae^{-\psi}\sin\varphi\,dy = 0, \tag{26}$$

или

$$[2e^{\psi}\,dp + e^{\psi}\,p\,d\psi - e^{\psi}\,q\,d\varphi]\sin\varphi +$$
$$+ [2e^{\psi}\,dq + e^{\psi}\,p\,d\varphi + e^{\psi}\,q\,d\psi]\cos\varphi = a\,dx,$$
$$e^{\psi}[2dp + p\,d\psi - q\,d\varphi]\cos\varphi - e^{\psi}[2dq + pd\varphi + qd\psi]\sin\varphi = a\,dy. \tag{27}$$

Умножая первое из этих соотношений (27) на p, второе на q и складывая их, получим первое соотношение (28):

$$d(p^2e^{\psi}\sin\varphi) - d(q^2e^{\psi}\sin\varphi) + d(2pq\cos\varphi\,e^{\psi}) = a\,d\varphi,$$
$$d(-e^{\psi}q^2\cos\varphi) + d(e^{\psi}p^2\cos\varphi) + d(-2pqe^{\psi}\sin\varphi) = a\,d\psi; \tag{28}$$

(второе соотношение (28) получается аналогично), или

$$p - iq = e^{-\psi/2}\left[\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right](\alpha - i\beta), \tag{29}$$

где $\alpha + i\beta = \sqrt{(a\psi + b_2) + i(a\varphi + b_1)}$.

Из (25) легко находим

$$dx + i\,dy = \frac{(p + iq)\,d\varphi - (q - ip)\,d\psi}{p^2 + q^2} = \frac{d\varphi + i\,d\psi}{p - iq}. \tag{30}$$

Если положить $x + iy = z$ и $\varphi + i\psi = w$, получим

$$dz = \frac{e^{-iw/2}\,dw}{\sqrt{-i[aw + b_1 + ib_2]}}, \quad \text{или} \quad -a\,dz = 2e^{-(u^2 - il)/2a}\,du, \tag{31}$$

где $l = b_1 + ib_2$, $u^2 = i(aw + l)$.

Функция $K(x, y)$ будет равна: $K(x, y) = e^{-\psi}[ny - mx - a/2]$, где a, m, n — константы.

Заметим, что если взять компоненты напряжений для идеальной пластичности в виде $\sigma_x = \omega - k\cos\varphi$, $\sigma_y = \omega + k\cos\varphi$, $\tau_{xy} = k\sin\varphi$, где k — постоянная пластичности, то функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (22). Таким образом, функцию $\varphi(x, y)$, удовлетворяющую системе уравнений (24), можно интерпретировать как гармоническую функцию характеристик теории пластичности Сен-Венана. Это решение замечательно тем, что если в системе (24) $a \to 0$, то решением этой системы будет функция $\varphi(x, y) = -2\operatorname{arc\,tg}(y/x) - 2\alpha$, которая при $\alpha = 0$ дает направление характеристик в случае плоскости с круговым отверстием, по контуру которого приложено постоянное давление ([1]).

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
19 IX 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Соколовский, Теория пластичности, изд. АН СССР, 1946, стр. 24. [2] Г. Н. Савин и О. С. Парасюк, Доклады АН УССР, № 4 (1947). [3] Н. И. Мусхелишвили, Основные задачи математической теории упругости, изд. АН СССР, 1935, стр. 163. [4] К. Н. Шевченко, Прикл. матем. и мех., **12**, в. 4 (1948).