Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 3

АЭРОДИНАМИКА

П. И. КУЗНЕЦОВ

КОЛЕБАНИЯ ПРОФИЛЯ КРЫЛА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 25 XI 1948)

1. Рассмотрим тонкое крыло бесконечного размаха, движущееся поступательно со сверхзвуковой постоянной скоростью под малым углом атаки. Пусть при этом крыло совершает малые гармонические колебания с частотой ω около рассматриваемого стационарного движения. Будем изучать движение газа в подвижной системе координат xOy, перемещающейся поступательно со скоростью u_0 (рис. 1).

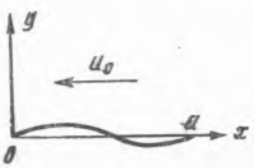

Рис. 1

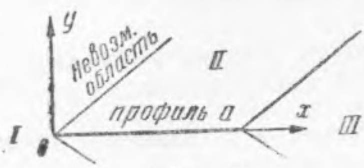

Рис. 2

Считая возмущенное движение газа потенциальным, для потенциала скоростей Φ имеем линеаризованное уравнение [1-4] (в подвижных осях)

$$N^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + 2\frac{M}{c}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t\, \partial x} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (N = \sqrt{M^2 - 1}), \qquad (1,1)$$

где $M = u_0/c$ — число Маха, c — скорость звука.

Считая возмущенное колебательное движение газа установившимся, представим потенциал скоростей в виде

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_0(x, y) + \varphi(x, y)\exp[-i(\omega t - \nu x)] \quad \left(\nu = \frac{\omega M}{cN^2}\right). \qquad (1,2)$$

Здесь $\Phi_0(x, y)$, — потенциал скоростей установившегося поступательного движения профиля [5], $\varphi(x, y)\exp[-i(\omega t - \nu x)]$ — потенциал скоростей, отвечающий колебаниям профиля.

Из (1,1) и (1,2) для функции $\varphi(x, y)$ имеем

$$N^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \sigma^2 N^2 \varphi = 0 \quad \left(\sigma = \frac{\omega}{cN^2} = \frac{\nu}{M}\right). \qquad (1,3)$$

Уравнение (1,3) принадлежит к гиперболическому типу (телеграфное уравнение). Линиями Маха, исходящими из передней и задней кромок (рис. 2), плоскость $x0y$ разбивается на три области I, II, III. В области III ось x представляет собой линию разрыва горизонтальных скоростей, схематизирующую поток вихрей, сходящих с поверхности профиля крыла.

Из условий обтекания поверхности профиля имеем граничное условие для Ф в области II:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = V_0(x) + V(x)\exp(-i\omega t) \qquad (V = V_1 + iV_2), \tag{1,4}$$

где $V_0(x)$ — нормальная составляющая поступательной скорости, а $V(x)\exp(-i\omega t)$ — нормальная составляющая, отвечающая скорости колебаний профиля.

Пусть профиль в подвижных осях задан уравнением

$$y = F_0(x) + F(x)\exp(-i\omega t) \quad (F = F_1 + iF_2), \tag{1,5}$$

где $F_0(x)$ — уравнение профиля при отсутствии колебаний.

В подвижных осях проекция скорости частиц профиля на ось y будет

$$\frac{dy}{dt} = u_0 \frac{dF_0}{dx} + u_0\left(\frac{dF}{dx} - i\alpha F\right)\exp(-i\omega t) \quad \left(\alpha = \frac{\omega}{u_0}\right). \tag{1,6}$$

Граничные условия с профиля переносим на отрезок оси x длины, равной хорде a.

Из условия прилипания, сравнивая (1,4) и (1,6), находим

$$V(x) = u_0\left(\frac{dF}{dx} - i\alpha F\right). \tag{1,7}$$

Для функции φ граничное условие в области II получится из (1,4) после подстановки (1,2):

$$\frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial y} = V(x)\exp(-i\nu x) \quad (+0 \leqslant x \leqslant a - 0). \tag{1,8}$$

Известно, что для определения подъемной силы и ее момента [2] необходимо найти значение φ только в области II, следовательно, граничные условия в областях I и III могут быть выбраны произвольно: условие (1,8) продолжаем в область III, а в области I принимаем $\varphi = 0$, $\partial\varphi/\partial x = 0$, $\partial\varphi/\partial y = 0$.

Окончательно имеем:

$$\frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial y} = 0 \qquad (-\infty < x \leqslant -0), \tag{1,9}$$

$$\frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial y} = V(x)\exp(-i\nu x) \quad (+0 \leqslant x < \infty),$$

$$\varphi(x, 0) = 0, \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial x} = 0 \qquad (-\infty < x \leqslant 0). \tag{1,10}$$

2. Умножая уравнение (1,3) на $\exp(-\lambda x)[\mathrm{Re}(\lambda) > 0]$ и интегрируя по λ от нуля до бесконечности (преобразование Лапласа [6]) и принимая во внимание условие (1,10), для функции φ получим уравнение

$$\frac{d^2\bar\varphi}{dy} - \mu^2\bar\varphi = 0 \qquad \left(\bar\varphi(\lambda, y) = \int_0^\infty \varphi(x, y)e^{-\lambda x}dx, \quad \mu^2 = N^2(\lambda^2 + \sigma^2)\right). \tag{2,1}$$

Конечным решением уравнения (2,1) при $y \to \infty$ будет

$$\bar{\varphi} = B \exp(-\mu y). \tag{2,2}$$

Для определения B используем условие (1,9); после прямого преобразования Лапласа имеем

$$\frac{\partial \bar{\varphi}(\lambda, 0)}{\partial y} = \bar{f}(\lambda) \qquad \left(\bar{f}(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} V(x) \exp[-(i\nu + \lambda)x]\, dx\right). \tag{2,3}$$

Беря производную по y от (2,2), приравнивая (2.3), получим $\bar{f}(\lambda) = -B\mu$. Следовательно,

$$\bar{\varphi}(\lambda, y) = -\frac{\bar{f}(\lambda)}{\mu} \exp(-\mu y). \tag{2,4}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получим

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a - i\infty}^{a + i\infty} \frac{\bar{f}(\lambda)}{\mu} \exp(\lambda x - \mu y)\, d\lambda, \tag{2,5}$$

где a — постоянная, бо̀льшая, чем действительная часть любой особенности функции $\bar{\varphi}(\lambda, y)$.

Легко убедиться, что интеграл (2,5) существует, удовлетворяет уравнениям (1,3) и условиям (1,9), (1,10), т. е. является решение поставленной задачи ([6]).

Интегрирование по прямой $\operatorname{Re}(\lambda) = a$ можно заменить интегрированием по любому замкнутому контуру γ_1, расположенному в конечной части плоскости и содержащему все особые точки функции $\bar{\varphi}(\lambda, y)$.

Если $\bar{f}(\lambda)$ — рациональная функция от λ, то интеграл (2,5), как показано в работе ([7]), может быть выражен в конечном виде через функции Ломмеля и Бесселя.

3. В качестве примера найдем потенциал $\varphi(x, y)$ в случае машущего профиля крыла ([8])

$$y = \beta_0 x + \beta_1 \exp(-i\omega t). \tag{3,1}$$

Согласно (1,7), (2,3) и (2,5) будем иметь $V(x) = -i\beta_1\omega$ и

$$\bar{f}(\lambda) = -\frac{i\beta_1\omega}{\lambda + i\nu}, \quad \varphi(x, y) = \frac{i\beta_1\omega}{N} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} \frac{\exp(\lambda x - Ny\sqrt{\lambda^2 + \sigma^2})}{(\lambda + i\nu)\sqrt{\lambda^2 + \sigma^2}}\, d\lambda. \tag{3,2}$$

С помощью преобразований ([7])

$$u = \sqrt{\frac{\lambda + i\sigma}{\lambda - i\sigma}}, \quad v = \frac{u^2 - 1}{u + 1}, \quad v = \varkappa w \quad \left(\varkappa = \sqrt{\frac{Ny - x}{Ny + x}}\right) \tag{3,3}$$

интеграл (3,2) приведем к виду

$$\varphi(x, y) = c\beta_1 \frac{1}{2\pi i} \int\limits^{(0+)} \left(\frac{dw}{w - w_1} - \frac{dw}{w - w_2}\right) \exp\left[\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)\right] \tag{3,4}$$

$$\left(z = -\sigma\sqrt{x^2 - N^2 y^2}, \quad w_1 = -\frac{M - N}{\varkappa}, \quad w_2 = -\frac{M + N}{\varkappa}\right).$$

Используя представление функций Ломмеля (7), найдем

$$\varphi(x, y) = c\beta_1 \{U_2(\eta_1, \zeta) - U_2(\eta_2, \zeta) + i[U_1(\eta_1, \zeta) - U_1(\eta_2, \zeta)]\} H(x - Ny),$$

где $U_n(\eta, \zeta)$ — функция Ломмеля от действительных аргументов и

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\sigma(x - Ny)}{M - N}, \quad H(x - Ny) = 0 \quad \text{при } x < Ny, \\ \eta_2 &= \frac{\sigma(x - Ny)}{M + N}, \quad H(x - Ny) = 1 \quad \text{при } x > Ny, \end{aligned} \qquad (\zeta = -z)$$

4. Если угол атаки профиля крыла меняется по гармоническому закону, то уравнение профиля ([8]) будет

$$y = \beta_0 x + \beta_1 x \exp(-i\omega t). \tag{4,1}$$

Проделав вычисления, аналогичные (3,2) — (3,4), получим

$$\varphi(x, y) = \frac{c^2\beta_1 N}{2\omega} \{(\xi_1 + \eta_1) U_2(\eta_1, \zeta) + (\xi_2 + \eta_2) U_2(\eta_2, \zeta) - (\eta_1 + \eta_2) J_0(\zeta) +$$

$$+ i[(\xi_1 + \eta_1) U_1(\eta_1, \zeta) + (\xi_2 + \eta_2) U_1(\eta_2, \zeta) + 2\zeta J_1(\zeta)]\} H(x - Ny),$$

где $J_n(\zeta)$ — функция Бесселя от действительного аргумента и

$$\xi_1 = \sigma(M - N)(x + Ny), \quad \xi_2 = \sigma(M + N)(x + Ny).$$

Аналогично можно рассмотреть задачу о колебании решетки ([4], [9]).

Поступило
23 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Borbely, ZAMM, 22, № 4 (1942). [2] И. А. Паничкин, Прикладн. матем. и мех., 11, 1 (1947). [3] Е. А. Красильщикова, там же, 11, 1 (1947). [4] А. Я. Сагомонян, Вестн. Московск. ун-та, № 5 (1948). [5] J. Ackeret, Z. ft Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt, 16 (1925). [6] В. А. Диткин, Усп. математ наук 2, 6 (22) (1947). [7] П. И. Кузнецов, Прикладн. матем. и мех., 11, 2 (1947). [8] Н. Е. Кочин, там же, 6, 4 (1942). [9] П. И. Кузнецов, там же, 11, 6 (1947).