Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 3

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР В. В. СТЕПАНОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. В моей заметке ([1]) доказана теорема, в силу которой ограниченность или неограниченность эрмитовой формы

$$\Phi(x)=\sum_{m,n}\varphi(\lambda_m-\lambda_n)\,x_m\overline{x}_n \tag{1}$$

зависит только от свойств последовательности (неравных) действительных чисел $\{\lambda_n\}$. Здесь $\varphi(\lambda)$ — положительно определенная функция вида

$$\varphi(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}p(t)\,dt,$$

где $p(t)$ — любая неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям (А) теоремы.

Выбирая $p(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-t^2/4}$, получаем: $\varphi(\lambda)=e^{-\lambda^2}$ и квадратическую форму

$$\Phi_1(x)=\sum_{m,n}e^{-(\lambda_m-\lambda_n)^2}x_m\overline{x}_n. \tag{1'}$$

Итак, достаточно установить условия ограниченности формы (1′). Прежде всего легко видеть, что для ограниченности (1′) необходимо, чтобы $\{\lambda_n\}$ не имела конечных предельных точек.

Упорядочим λ_n в порядке возрастания; возможны три порядковых типа: 1) $1\leqslant n<\infty$; 2) $-\infty<n\leqslant 1$; 3) $-\infty<n<\infty$; тип 2) сводится к 1) заменой t на $-t$. Введем еще обозначение: $\Phi(x)\ll\Psi(x)$, если коэффициенты формы $\Psi(x)$ положительны и не меньше абсолютной величины соответствующих коэффициентов формы $\Phi(x)$.

Теорема 1. *Для ограниченности формы* (1) *необходимо и достаточно существование такого* $\alpha>0$ *и такого натурального* p^*, *что, если*

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n<\alpha,\quad \lambda_{n+2}-\lambda_{n+1}<\alpha,\ldots,\lambda_{n+p-1}-\lambda_{n+p-2}<\alpha,$$

то

$$\lambda_{n+p}-\lambda_{n+p-1}\geqslant\alpha, \tag{B}$$

где $p\leqslant p^*$.

Достаточность. Пусть условие (B) выполнено. Заменяя разности $\lambda_{n+1}-\lambda_n$, меньшие α, через 0, а бо́льшие или равные α — через α, мы увеличиваем коэффициенты формы Φ_1, так что

$$\Phi_1(x) \ll \sum_k (x_{n_k} + x_{n_k+1} + \ldots + x_{n_k+p_k-1})^2 +$$

$$+ \sum_{k \neq l} e^{-(k-l)^2\alpha^2} (x_{n_k} + \ldots + x_{n_k+p_k-1})(x_{n_l} + \ldots + x_{n_l+p_l-1}),$$

$$n_k + p_k = n_{k+1}, \quad p_k \leqslant p^*.$$

Далее,

$$(x_{n_k} + \ldots + x_{n_k+p_k-1})^2 \leqslant p_k (x^2_{n_k} + \ldots + x^2_{n_k+p_k-1}) \leqslant p^* \sum_{n_k}^{n_k+p_k-1} x_n^2,$$

$$(x_{n_k} + \ldots + x_{n_k+p_k-1})(x_{n_l} + \ldots + x_{n_l+p_l-1}) \leqslant \frac{1}{2} p_l \sum_{n_k}^{n_k+p_k-1} x_n^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} p_k \sum_{n_l}^{n_l+p_l-1} x_n^2 \leqslant \frac{1}{2} p^* \left(\sum_{n_k}^{n_k+p_k-1} x_n^2 + \sum_{n_l}^{n_l+p_l-1} x_n^2 \right);$$

в итоге

$$\Phi_1(x) \ll p^* (1 + e^{-\alpha^2} + e^{-4\alpha^2} + \ldots + e^{-k^2\alpha^2} + \ldots) \sum_n x_n^2,$$

т. е. (1′), а следовательно и (1), ограничена.

Необходимость. Пусть условие (B) не выполняется: для любого $\varepsilon > 0$ и натурального p найдется такое n, что

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n < \varepsilon, \quad \lambda_{n+2} - \lambda_{n+1} < \varepsilon, \ldots, \lambda_{n+p} - \lambda_{n+p-1} < \varepsilon.$$

Пусть значениям $p = 1, 2, \ldots$ и $\varepsilon_p = 1/p$ соответствуют значения $n = n_p$, причем группы чисел $n_p, n_p + 1, \ldots, n_p + p$, $p = 1, 2, \ldots$, не имеют общих элементов.

Сохраняем в форме Φ_1 лишь те члены, где m и n входят в одну и ту же из этих групп. Получим:

$$\Phi_1(x) \gg \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k,\, l=0}^{p} e^{-(\lambda_{n_p+k} - \lambda_{n_p+l})^2} x_{n_p+k} x_{n_p+l}.$$

Замечая, что $|\lambda_{n_p+k} - \lambda_{n_p+l}| \leqslant p\varepsilon_p = 1$, мы имеем:

$$\Phi_1(x) \gg e^{-1} \sum_{p=1}^{\infty} (x_{n_p} + x_{n_p+1} + \ldots + x_{n_p+p})^2 = e^{-1} \Psi(x).$$

Форма $\Psi(x)$ неограничена; в самом деле, достаточно положить $x_{n_p} = x_{n_p+1} = \ldots = x_{n_p+p} \dfrac{1}{(p+1)^{3/2}}$, остальные $x_n = 0$, и мы получим:

$$\sum x_n^2 = \sum_1^{\infty} \frac{1}{(p+1)^2} < \infty, \qquad \Psi(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{p+1} = \infty.$$

Следовательно Φ_1, а значит и Φ, неограничена.

В частности, при $p^* = 1$ условие (B) сводится к условию $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant \alpha$.

2. Если $f(t)$ является почти периодической функцией класса S_2 (²) и ее ряд Фурье есть

$$f(t) \sim \sum a_n e^{i\lambda_n t}, \tag{2}$$

то необходимо

$$\sum |a_n|^2 < \infty. \tag{3}$$

Условие (3) недостаточно, чтобы $f \in S_2$, в этом случае ряд (2) вообще определяет функцию B_2[3].

Теорема позволяет дать достаточное условие, при выполнении которого ряд (2) с условием (3) определяет $f \in S_2$. В работе [1] показано, что норма частной суммы ряда (2) в одной из эквивалентных метрик S_2 с весом $p(t)$, удовлетворяющим условиям (A), дается формулой:

$$\|P_N(t)\|^2 = \sup_{\alpha} \sum_{m,\,n} \varphi(\lambda_m - \lambda_n)\, a_m e^{i\lambda_m \alpha}\, \bar{a}_n e^{-i\lambda_n \alpha}. \tag{4}$$

Отсюда следует: необходимым и достаточным условием сходимости частных сумм ряда (2) в метрике S_2 (следовательно, вследствие полноты пространства, сходимости к $f(t) \in S_2$) является ограниченность формы (1).

Достаточность непосредственно следует из определения ограниченной формы, необходимость получается, если предположить $a_n > 0$, тогда верхняя грань (4) достигается при $\alpha = 0$.

Итак, *если* $\{\lambda_n\}$ *удовлетворяют условию* (B), *то при любых коэффициентах, выполняющих* (3), *ряд* (2) *определяет* $f \in S_2$.

Таким образом, для этого класса (включающего периодические функции) справедлива теорема Фишера — Риса. Частный случай настоящей теоремы ($\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant \alpha > 0$) указан L. Amerio [4].

3. Докажем, что условие (B) вообще необходимо, чтобы ряду Фурье со сходящимся рядом (3) соответствовала почти периодическая функция класса S_2.

Теорема 2. *Если* $a_n > 0$ *выполняют* (3) *и* $\Phi(a) = \infty$, *то ряду* (2) *не может соответствовать* $f(t) \in S_2$.

Если $f(t) \in S_2$, то доказывается (аналогично [2]), что

$$f_h(t) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau)\, e^{-\tau^2/h^2}\, d\tau$$

есть почти периодическая функция Бора (U_{pp}), которая при $h \to 0$ сходится к $f(t)$ в метрике S_2. Ей соответствует ряд Фурье

$$f_h(t) \sim \sum a_n e^{-\lambda_n^2 h^2/4}\, e^{i\lambda_n t}.$$

Функция $f_h(t) \in U_{pp}$ равномерно апроксимируется суммами Бохнера — Фейера [5]

$$s_q(t) = \sum_n k_n^{(q)} e^{-\lambda_n^2 h^2/4}\, e^{i\lambda_n t},$$

причем $0 \leqslant k_n^{(q)} \leqslant 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} k_n^{(q)} = 1$. Допустив $f(t) \in S_2$, имеем: $\|f\|^2 = M < \infty$. Следовательно, для достаточно малого $h > 0$ и достаточно большого q имеем: $\|s_q\|^2 < 2M$. Но по формуле (4) (s_q есть полином, $a_n > 0$) имеем:

$$\|s_q\|^2 = \Phi\left(k_n^{(q)} a_n e^{-\lambda_n^2 h^2/4}\right).$$

Из условия $\Phi(a)=\infty$ следует, что $\Phi_N(a)>3M$ при достаточно большом N, а отсюда, увеличивая в случае надобности q и уменьшая h, получаем:

$$\|s_q\|^2 \geqslant \Phi_N\left(k_n^{(q)} a_n e^{-\lambda_n^2 h^2/4}\right) > 2M.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

В частности, если $|\lambda_n| < \Lambda$ для всех n, то $\Phi_N(a) \gg c\left(\sum_1^N a_n\right)^2$, где $c=e^{-4\Lambda^2}$, и ряд (2) при условии $a_n>0$ представляет $f \in S_2$ только, если $\sum_1^\infty a_n < \infty$, и в этом случае $f \in U_{pp}$. Доказательство этого факта для $\lambda_n \to 0$ сообщено мне Б. М. Левитаном.

Поступило
30 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Степанов, ДАН, 64, № 2 (1949) [2] В. Степанов, Math. Ann., 95 (1926). [3] A. Besicovitch, Almost Periodic Functions, 1932. [4] L. Amerio, Ann. Scuola norm. sup. Pisa, II s., 10 (1941). [5] Г. Бор, Почти периодические функции, М.— Л., 1934.