Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 3

МАТЕМАТИКА

П. С. НОВИКОВ

О КЛАССАХ РЕГУЛЯРНОСТИ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 26 XI 1948)

В работе (1) мною было введено понятие регулярных формул для логического исчисления особого типа. В этом логическом исчислении как образование формул, так и правила вывода определяются по трансфинитной индукции и рассуждения об этом исчислении проводятся также по трансфинитной индукции, „закон исключенного третьего“ при этом не применяется.

Понятие регулярности было использовано для доказательства непротиворечивости данной системы. Те же идеи можно привлечь для изучения логических систем обычного типа и ввести для них аналогичные понятия „регулярности формул“ уже без всяких трансфинитных принципов. Эти понятия позволяют устанавливать некоторые новые факты в вопросах независимости тех или других аксиом. Метод, появляющийся на основе понятия „регулярности“, имеет по своей природе родство с методами Гербрандта и Гентцена.

Введем указанные понятия для логического исчисления, называемого логикой предикатов, или, еще иначе, „узким исчислением предикатов“, пополненного символами предметных функций и индивидуальных предметов. Выражения, имеющие смысл объекта (а не высказывания), как, например, предметные переменные, индивидуальные предметы, предметные функции, мы, как обычно, объединяем в понятие „терма“.

Мы выделим некоторые классы формул указанного исчисления и назовем их классами регулярности. В каждом классе регулярности имеются формулы, которые мы будем называть примитивными формулами данного класса регулярности. Определение класса регулярности состоит в том, что указываются примитивные формулы этого класса, затем через них определяются остальные формулы. При этом задание примитивных формул однозначно определяет класс регулярности.

Подкласс примитивных формул произвольного класса регулярности представляет собой произвольное семейство формул, обладающее следующими свойствами.

1. Каждая примитивная формула представляет собой либо элементарную формулу, либо отрицание элементарной формулы, либо логическую сумму элементарных формул и их отрицаний (такие формулы мы назовем элементарными логическими суммами) *.

2. Семейство примитивных формул содержит любую элементарную логическую сумму, содержащую вместе с какой-либо из элементарных формул также и ее отрицание.

* Элементарной формулой мы называем формулу, не содержащую символа логических операций, именно: символов &, $\vee$, $\rightarrow$ и $^{-}$ и кванторов. Под логической суммой понимается выражение $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \mathfrak{A}_n$, а под логическим произведением — выражение $\mathfrak{A}_1 \& \ldots \mathfrak{A}_n$.

3. Если примитивная формула некоторого семейства содержит свободное предметное переменное, то замещение этого предметного переменного любым термом приводит к формуле того же семейства.

Таким образом, подклассы примитивных формул классов регулярности определены.

Для определения самих классов регулярности введем предварительно три операции, которые мы будем производить над формулами, не содержащими иных операций логики суждений, кроме & и $^{-}$, и такими, что знаки отрицания в них относятся только к элементарным формулам. Эти формулы мы будем называть п р и в е д е н н ы м и.

Всякую формулу можно представить в форме произведения сумм:

$$(\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \ldots) \mathbin{\&} (\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2 \vee \ldots) \mathbin{\&} \ldots (\mathfrak{K}_1 \vee \mathfrak{K}_2 \vee \ldots), \tag{1}$$

если считать, что это произведение может, в частности, состоять из одного множителя, а каждая из сумм $(\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \mathfrak{A}_n), \ldots$ из одного слагаемого. Эта форма наиболее удобна для определения требуемых операций.

1-я операция состоит в том, что в каком-либо слагаемом $\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_j, \ldots, \mathfrak{K}_s$, имеющем вид $(x)\, \mathfrak{M}(x)$, вычеркивается квантор (x); при этом переменное x заменяется новым, не совпадающим ни с одним связанным и свободным переменным в формуле (1).

2-я операция применяется к слагаемому $\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_j, \ldots$ или $\mathfrak{K}_s$, имеющему вид $(Ex)\, \mathfrak{M}(x)$, и заключается в добавлении к сумме еще одного члена $\mathfrak{M}(\psi)$, полученного из $\mathfrak{M}(x)$ замещением переменного x любым термом ψ, лишь бы эта замена не приводила к коллизии переменных.

3-я операция применяется к слагаемому $\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_j, \ldots, \mathfrak{K}_s$, имеющему вид произведения. Пусть, например, $\mathfrak{A}_1$ имеет вид

$$\mathfrak{A}_1^1 \mathbin{\&} \mathfrak{A}_1^2 \mathbin{\&} \ldots \mathfrak{A}_1^p.$$

Операция состоит в том, что множитель, содержащий это слагаемое, заменяется произведением множителей, полученных из данного посредством дистрибутивного преобразования, именно, множитель $(\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \ldots)$ заменяется в формуле (1) произведением

$$(\mathfrak{A}_1^1 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \ldots) \mathbin{\&} (\mathfrak{A}_1^2 \vee \mathfrak{A}_2 \vee \ldots) \mathbin{\&} (\mathfrak{A}_1^p \vee \mathfrak{A}_2 \vee \ldots).$$

Определим теперь понятие „класс регулярности“. Заметим, что каждую формулу можно привести тождественными преобразованиями к приведенной формуле; назовем последнюю приведенной формой данной формулы.

Рассмотрим произвольное семейство примитивных формул описанного выше типа. Класс регулярности, содержащий это семейство, состоит из тех и только тех формул, приведенная форма которых либо имеет вид произведения

$$\mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \mathfrak{A}_2 \mathbin{\&} \ldots \mathfrak{A}_n,$$

каждый множитель которого $\mathfrak{A}_i$ представляет собой примитивную формулу данного семейства, либо может быть приведена к такому виду операциями 1, 2, 3 (произведение $\mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \ldots \mathfrak{A}_n$ может, в частности, сводиться к одному множителю). Тиким образом, мы видим, что класс регулярности однозначно определяется заданием его подкласса примитивных формул.

Т е о р е м а. *Каждая формула, выведенная посредством правил логика предикатов из формул некоторого класса регулярности сама принадлежит тому же классу регулярности.*

Присоединим к общелогическим аксиомам рассматриваемого исчисления аксиомы арифметики вместе с рекурсивными определениями. Полученное исчисление назовем арифметикой. Примем в качестве семейства примитивных формул все элементарные логические суммы, выводимые в арифметике.

Это семейство примитивных формул определяет некоторый класс регулярности. Легко показать, что все аксиомы арифметики, кроме аксиомы полной индукции (в том числе и общелогические аксиомы), входят в данный класс регулярности.

Если предположить, что арифметика непротиворечива, то можно показать, что аксиома полной индукции не входит в этот класс регулярности. Отсюда вытекает, что из непротиворечивости арифметики следует независимость аксиомы полной индукции. Можно так изменить определение класса регулярности, что независимость аксиомы полной индукции получится без ссылки на непротиворечивость арифметики.

Аналогичным образом можно получить и более сильный результат. Аксиома полной индукции независима в любой непротиворечивой системе аксиом, содержащей все аксиомы арифметики и такой, что все ее аксиомы, не являющиеся аксиомами арифметики, не содержат переменных предикатов.

Указанные следствия принадлежат к числу уже известных, но, прибегая к другим классам регулярности, можно получить и новые результаты, которые мы изложим в следующих статьях.

Понятие „класса регулярности" можно ввести и в других логических исчислениях. Рассмотрим одно из них, носящее название простой теории типов ([2]). В этом исчислении переменными, входящими под знаки предикатов, могут быть не только предметы, но и сами предикаты. Предикаты в этом исчислении разделяются на типы, так что предикат, в который входят другие предикаты в качестве аргументов, принадлежит к более высокому типу, чем входящие в него предикаты. В этом исчислении сохраняются аксиомы и правила логики предикатов и, кроме того, присоединяются новые аксиомы. Можно ввести в это исчисление и арифметические термы. Для указанного исчисления можно определить классы регулярности точно так же, как это сделано в арифметике. Надо только иметь в виду, что операции 1 и 2 применимы теперь не только к кванторам, связывающим предметные переменные, а также и к кванторам, связывающим переменные предикаты. При этом, применяя операцию 2 к квантору существования, мы должны заменять в добавленном члене переменное, связанное данным квантором, любым другим переменным предикатом того же самого типа. Основная теорема о классах регулярности здесь также имеет место.

Поступило
29 X 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Новиков, Матем. сб., 12 (54), № 2 (1943). [2] Д. Гильберт и В. Аккерман, Основы теоретической логики, гл. IV, § 5, 1947.