Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 3

МАТЕМАТИКА

А. Х. ЛИВШИЦ

К ТЕОРИИ ПРЯМЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 27 XI 1948)

Определение 1. Пусть K и Z, соответственно, коммутант и центр группы G. Подгруппу группы Z, на которую может быть гомоморфно отображена ф ктор-группа G/K, будем называть L-подгруппой группы G. Примарную L-подгруппу группы G по данному простому числу p будем называть примарной p-L-подгруппой группы G.

Определение 2. Группу G будем называть $(p_1, \ldots, p_k)$-F-группой, если для каждого простого числа p из $(p_1, \ldots, p_k)$ ее единственной примарной p-L-подгруппой является единичная подгруппа.

Определение 3. Если

$$G = A \times B = C \times D \tag{1}$$

прямые разложения группы G и если их продолжения

$$A = A' \times A'', \quad B = B' \times B'', \quad C = C' \times C'', \quad D = D' \times D'' \tag{2}$$

удовлетворяют условиям

$$A' \times B' = B' \times D' = D' \times E' = E' \times A',$$
$$A'' \times C'' = C'' \times D'' = D'' \times B'' = B'' \times A'',$$

то разложения (2) называются каноническими продолжениями пары прямых разложений (1) [3].

Теорема. *Если всякая L-подгруппа группы G является периодической, причем ее примарные компоненты удовлетворяют условию минимальности, то всякие два прямых разложения этой группы обладают центрально изоморфными продолжениями.*

Доказательство. Для случая прямых разложений с конечным числом множителей теорема доказана А. Г. Курошем [1]. Следовательно, прямые разложения $G = A \times B = C \times D$ обладают каноническими продолжениями [2] $G = A' \times A'' \times B' \times B'' = C' \times C'' \times D' \times D''$.

Рассмотрим сначала два прямых разложения группы G, одно из которых обладает двумя, а другое — счетным числом прямых множителей

$$G = G_1 \times G_2 = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n \times \ldots \tag{3}$$

Рассмотрим прямые разложения группы G:

$$G = G_1 \times G_2 = H_1 \times \overline{H}_1, \quad \overline{H}_1 = \prod_{n=2}^{\infty} H_n.$$

Они обладают центрально изоморфными продолжениями

$$G = G_{11} \times \overline{G}_{11} \times G_{12} \times \overline{G}_{12} = H_{11} \times H_{12} \times \overline{H}_{11} \times \overline{H}_{12}.$$

Рассмотрим прямые разложения группы $\overline{H}_1$:

$$\overline{H}_1 = \overline{H}_{11} \times \overline{H}_{12} = H_2 \times \overline{H}_2, \quad \overline{H}_2 = \prod_{n=3}^{\infty} H_n.$$

Они также обладают центрально изоморфными продолжениями:

$$\overline{H}_1 = \overline{H}'_{11} \times \overline{H}''_{11} \times \overline{H}'_{12} \times \overline{H}''_{12} = H_{21} \times H_{22} \times \overline{H}_{21} \times \overline{H}_{22},$$

а в силу центрального изоморфизма между $\overline{H}_{11}$ и $\overline{G}_{11}$, $\overline{H}_{12}$ и $\overline{G}_{12}$,

$$\overline{G}_{11} = G_{21} \times \overline{G}_{21}, \quad \overline{G}_{12} = G_{22} \times \overline{G}_{22},$$

где G_{21}, $\overline{G}_{21}$, G_{22}, $\overline{G}_{22}$ центрально изоморфны соответственно H_{21}, $\overline{H}_{21}$, H_{22}, $\overline{H}_{22}$ и т. д. Продолжаем указанное построение для всех подгрупп H_n. Мы получим продолжение второго из прямых разложений (1):

$$G = \prod_{n=1}^{\infty} (H_{n1} \times H_{n2}).$$

Для каждой из подгрупп H_{n1} и H_{n2} существует центрально изоморфная ей подгруппа $G_{n1} \subseteq G_1$ и $G_{n2} \subseteq G_2$. Покажем, что

$$G_1 = \prod_{n=1}^{\infty} G_{n1}, \quad G_2 = \prod_{n=1}^{\infty} G_{n2},$$

чем будет доказана теорема для нашего случая.

Обозначим подгруппу, порожденную всеми G_{n1}, $n = 1, 2, \ldots$, через R_1, а всеми G_{n2} через R_2. Легко проверить, что

$$R_1 = \prod_{n=1}^{\infty} G_{n1}, \quad R_2 = \prod_{n=1}^{\infty} G_{n2}.$$

Лемма. *Пусть группа G, удовлетворяющая условиям нашей теоремы, является $(p_1, \ldots, p_k)$-F-группой по всем простым числам, входящим в каноническое разложение числа m, являющегося порядком элемента x группы G. Тогда, если мы имеем прямые разложения*

$$G = A_{11} \times A_{12} \times A_{21} \times A_{22} = B_{11} \times B_{12} \times B_{21} \times B_{22}, \tag{4}$$

являющиеся каноническими продолжениями прямых разложений

$$G = A_1 \times A_2 = B_1 \times B_2,$$

то компоненты элемента x в первом из прямых разложений (4) *совпадают с его компонентами в соответствующих множителях второго из прямых разложений* (4).

Доказательство. Пусть $x = x_{11} \cdot x_{12} \cdot x_{21} \cdot x_{22} = y_{11} \cdot y_{12} \cdot y_{21} \cdot y_{22}$, где $x_{ij} \in A_{ij}$, $y_{ij} \in B_{ij}$, $i, j = 1, 2$. Так как A_{ij} центрально изоморфна B_{ij}, то $x_{ij} = a_{ij} y_{ij}$, где a_{ij} есть элемент L-подгруппы группы G и порядок его должен делить m, так как он является компонентой x_{ij} в $\overline{B}_{ij}$ ($\overline{B}_{ij}$ есть произведение всех множителей второго из разложений (4), за исключением B_{ij}), следовательно $a_{ij} = 1$ и $x_{ij} = y_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

Продолжаем доказательство теоремы. Очевидно, что $R_1 \subseteq G_1$, $R_2 \subseteq G_2$. Покажем, что имеет место обратное включение.

Пусть x — произвольный элемент из G_1 конечного порядка m и $m = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — разложение числа m на простые множители. Так как, по условию теоремы, всякая примарная p-L-подгруппа группы G

удовлетворяет условию минимальности, то, применяя рассуждение, проведенное А. Г. Курошем при доказательстве леммы 20 ( ), получаем, что после удаления конечного числа множителей из любого прямого разложения группы G произведение оставшихся множителей будет p-F-группой по данному p. Применяя ту же операцию к оставшейся части несколько раз, получим, что после удаления конечного числа множителей из любого прямого разложения группы G оставшаяся часть будет $(p_{s_1}, \ldots, p_{s_r})$-$F$-группой по данному конечному множеству простых чисел $(p_{s_1}, \ldots, p_{s_r})$. Применим эту операцию ко второму из прямых разложений (3) так, чтобы указанное множество простых чисел совпадало с множеством простых чисел, входящих в каноническое разложение числа m-порядка элемента x. Пусть N—наибольший из номеров удаленных при этом подгрупп. Рассмотрим результат N-кратного применения указанного выше построения к прямым разложениям (3):

$$G_i = G_{1i} \times G_{2i} \times \ldots \times G_{Ni} \times \overline{G}_{Ni}, \quad i = 1, 2;$$

$$H_j = H_{j1} \times H_{j2}, \quad j = 1, \ldots, N, \quad \overline{H}_N = \prod_{n=N+1}^{\infty} H_n = \overline{H}_{N1} \times \overline{H}_{N2}.$$

Элемент $x \in G_1$ имеет разложение $x = x_{11} \cdot x_{21} \cdots x_{N1} \cdot \overline{x}$, где $x_{k1} \in G_{k1}$, $\overline{x} \in \overline{G}_{N1}$. Но $x_{11} \cdot x_{21} \cdots x_{N1} \in R_1$; следовательно, для доказательства того, что $x \in R_1$, надо доказать, что $\overline{x} \in R_1$. В силу центрального изоморфизма между подгруппами $\overline{G}_{N1}$ и $\overline{H}_{N1}$ элементу $\overline{x} \in \overline{G}_{N1}$ соответствует элемент $\overline{y} \in \overline{H}_{N1}$; но $\overline{H}_{N1} \times \overline{H}_{N2} = \prod\limits_{n=N+1}^{\infty} H_n$ и, следовательно, существует такое число N_1, что компонента элемента $\overline{y}$ в H_{N+N_1} отлична от единицы, а его компонента в H_l для всех $l > N + N_1$ равна единице. Проделаем в нашем построении, кроме уже сделанных N шагов, еще N_1 шагов. Мы придем к прямым разложениям

$$G_i = \prod_{j=1}^{N+N_1} G_{ji} \times \overline{G}_{N+N_1, i}, \quad i = 1, 2,$$

$$H_n = H_{n1} \times H_{n2}, \quad n = 1, \ldots, N + N_1, \quad \overline{H}_{N+N_1} = \overline{H}_{N+N_1,1} \times \overline{H}_{N+N_1,2}.$$

Элемент $\overline{y}$ получит при этом следующую запись: $\overline{y} = \overline{y}_{N+1,1} \ldots \ldots \overline{y}_{N+N_1,2}$, причем порядки элементов $\overline{y}_{N+k,1}$ и $\overline{y}_{N+k,2}$, $k=1,\ldots,N_1$, будут делителями m. В силу центрального изоморфизма между подгруппами $H_{N+k,1}$, $H_{N+k,2}$ и $G_{N+k,1}$, $G_{N+k,2}$ элементам $\overline{y}_{N+k,1} \in H_{N+k,1}$ и $\overline{y}_{N+k,2} \in H_{N+k,2}$ соответствуют элементы $\overline{x}_{N+k,1} \in G_{N+k,1}$ и $\overline{x}_{N+k,2} \in \in G_{N+k,2}$, причем, в силу леммы, те самые, которые соответствовали этим элементам при центральном изоморфизме, установленном между подгруппами $\overline{G}_{N1}$, $\overline{G}_{N2}$ и $\overline{H}_{N1}$, $\overline{H}_{N2}$ после первых N шагов нашего построения; учитывая то, что элементу $\overline{y}$ соответствует при этом изоморфизме элемент $\overline{x}$, получаем $\overline{x} = \overline{x}_{N+1,1} \cdots \overline{x}_{N+N_1,2}$, а так как все $\overline{x}_{N+k,1}$, $\overline{x}_{N+k,2}$, $k = 1, \ldots, N_1$, лежат в $R_1 \times R_2$, то $\overline{x}$ лежит в R_1, откуда следует, что все элементы конечного порядка из G_1 лежат в R_1.

Возьмем теперь произвольный элемент z из G_1 и покажем, что он лежит в R_1. Так как лишь конечное число компонент элемента z во втором из прямых разложений (3) отлично от единицы, то существует такое целое число d, что его компонента в H_d отлична от единицы, а в H_l для всех $l > d$ равна единице. Тогда элемент z в продолжении второго из прямых разложений (3), которое получается после первых d шагов указанного выше построения:

$$G = H_{11} \times H_{12} \times \ldots \times H_{d1} \times H_{d2} \times \overline{H}_{d1} \times \overline{H}_{d2}, \tag{5}$$

запишется так: $x = x_{11} \cdot \ldots \cdot x_{d2}$, где $x_{ik} \in H_{ik}$, $i = 1, \ldots, d$; $k = 1, 2$. Так как прямое разложение (5) центрально изоморфно прямому разложению

$$G = G_{11} \times G_{21} \times \ldots \times G_{d1} \times \overline{G}_{d1} \times G_{12} \times G_{22} \times \ldots \times G_{d2} \times \overline{G}_{d2},$$

то мы имеем $x_{ik} = a_{ik} y_{ik}$, где $y_{ik} \in G_{ik}$, $k = 1, 2$; $i = 1, 2, \ldots, d$ и a_{ik} — элементы L-подгрупп группы G, т. е. элементы конечного порядка. Далее, компоненты x_{ik} в G_1 лежат в R_1, так как компоненты в G_1 элементов $y_{i1} \in G_{i1}$ лежат в R_1, компоненты в G_1 элементов y_{i2} единицы, а компоненты в G_1 элементов a_{ik} имеют конечный порядок, а следовательно, по доказанному, лежат в R_1. Отсюда следует, что и компонента в G_1 элемента $x = x_{11} \ldots x_{d2}$ лежит в R_1, а так как $x \in G_1$, то его компонента в G_1 совпадает с x, и мы доказали, что $x \in R_1$, откуда следует включение $G_1 \subseteq R_1$. Таким образом, мы доказали, что $G_1 = R_1$. Аналогично доказывается, что $G_2 = R_2$, чем заканчивается доказательство теоремы для случая двух прямых разложений, одно из которых обладает двумя, а другое — счетным числом прямых множителей.

Докажем теперь теорему для случая двух прямых разложений, каждое из которых обладает счетным числом множителей:

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n \times \ldots = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n \times \ldots$$

Доказательство существования центрально изоморфных продолжений этих прямых разложений проводится точно так же, как и доказательство для предыдущего случая, а именно, второе прямое разложение опять представляем в виде

$$G = H_1 \times \overline{H}_1, \quad \overline{H}_1 = \prod_{n=2}^{\infty} H_n$$

и, используя доказанное выше, проводим то же самое построение и то же самое рассуждение, что и при доказательстве предыдущего случая.

Перейдем к доказательству теоремы для общего случая. Пусть даны два произвольных прямых разложения группы G:

$$G = \prod_{\alpha} G_{\alpha} = \prod_{\beta} H_{\beta}.$$

Рассмотрим упорядоченную последовательность всех простых чисел $p_1 < p_2 < \ldots < p_k < \ldots$. Как мы выше уже отмечали, удалив из любого прямого разложения группы G конечное число множителей, получим p_1-F-группу; удалив еще конечное число множителей, получим (p_1, p_2)-F-группу, и т. д. Удалив из любого прямого разложения группы G счетное число множителей, получим p-F-группу по всем p_k, $k = 1, 2, \ldots$, т. е. просто F-группу ([1]). Комбинируя доказанное выше с леммой 19 работы ([1]), получаем доказательство нашей теоремы.

Считаю своим долгом выразить благодарность А. П. Дицману, под непосредственным руководством которого была выполнена эта работа.

Поступило
15 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Курош, Изв. АН СССР, сер. матем., 10, 47 (1946). [2] R. Baer, Trans. Am. Math. Soc., 67, No. 1 (1947). [3] R. Baer, Bull. Am. Math. Soc., 54, No 2 (1948).