Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 3

МАТЕМАТИКА

М. КРЕЙН и Б. ЛЕВИН

О ЦЕЛЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 1 XII 1948)

Как известно, для того чтобы спектр почти периодической функции $f(x)$ лежал в конечном интервале $(-\Delta, \Delta)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была целой экспоненциального типа $H \leqslant \Delta$:

$$H = \lim_{|z|\to\infty} \frac{\ln |f(z)|}{|z|} \qquad (z = x + iy).$$

Мы будем называть почти периодическую функцию $f(z)$ функцией класса $[\Delta]$, если: 1) $[-\Delta, \Delta]$ есть наименьший сегмент, содержащий весь спектр функции $f(z)$; 2) точки $\pm\Delta$ принадлежат спектру.

Из известной теоремы Г. Бора о значениях почти периодических функций, голоморфных в полуплоскости [1], следует, что при выполнении условия 1) условие 2) эквивалентно тому, что все корни функции $f(z)$ лежат в полосе конечной ширины: $|\operatorname{Im} z| < M < \infty$.

В этой заметке устанавливаются характеристические свойства множества корней функций класса $[\Delta]$.

1. Обозначим через $n(t)$ при $t>0$ число корней функции $f(z)$ класса $[\Delta]$ в полосе $0 < \operatorname{Re} z \leqslant t$, а при $t < 0$ — взятое со знаком минус число корней в полосе $t < \operatorname{Re} z \leqslant 0$.

Теорема 1. *Для функции класса* $[\Delta]$

$$n(t) = \frac{\Delta}{\pi} t + \omega(t), \tag{1}$$

где $\omega(t)$ — ограниченная функция, почти периодическая в смысле В. В. Степанова.

В дальнейшем предполагается, что корни функции $f(z)$ класса $[\Delta]$ перенумерованы в порядке возрастания их вещественных частей (порядок нумерации корней с равными вещественными частями несущественен).

Обращением формулы (1) получается:

Теорема 2. *Пусть $\{a_k\}_{-\infty}^{\infty}$ — последовательность всех корней функции $f(z)$ класса $[\Delta]$. Тогда*

$$\operatorname{Re} a_k = \frac{\pi}{\Delta} k + \varphi(k), \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ — некоторая почти периодическая функция Бора, причем наименьший числовой модуль, содержащий число Δ, и все показатели Фурье функции $\varphi(x)$, умноженные на Δ/π, входят в модуль функции $f(z)$.

Из этой теоремы, в частности, следует, что функция $f(z)$ может быть представлена в форме

$$f(z) = \text{V. p. } cz^m \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \quad (m \geqslant 0). \tag{3}$$

В связи с представлением (2) интересен тот факт, что существуют функции класса $[\Delta]$, у которых $\operatorname{Im} a_k$ не является почти периодической функцией от k. Нетрудно убедиться, что такой функцией является, например,

$$g(x) = \sin x \cdot \sin \lambda (x - i) \quad (\lambda \text{ — иррациональное число}). \tag{4}$$

2. Определение 1. Число τ назовем ε-смещением точечного множества $\{a\}$, если точки множества $\{a + \tau\}$ можно поставить во взаимно однозначное соответствие точкам множества $\{a\}$ так, что расстояние между соответствующими точками меньше ε.

Определение 2. Множество $\{a\}$ назовем точечным почти периодическим множеством, если каждому $\varepsilon > 0$ отвечает относительно плотное множество его ε-смещений.

Полную характеристику множества корней функций класса $[\Delta]$ дает

Теорема 3. *Для того чтобы $f(z)$ была функцией класса* $[\Delta]$, *необходимо и достаточно, чтобы функция $f(z)$ представлялась в виде* (3) *и при этом выполнялись следующие условия*:

1°. *Корни a_k функции $f(z)$ образуют точечное почти периодическое множество.*

2°. *Корни a_k допускают представление:*

$$a_k = \frac{\pi}{\Delta} k + \psi(k), \tag{5}$$

где $\psi(z) e^{-i\pi z}$ — целая функция экспоненциального типа $H \leqslant \pi$, ограниченная на вещественной оси.

Заметим, что если некоторая последовательность построена по формуле (5), где $\psi(x)$ — произвольная почти периодическая функция Бора, то условие 1 будет выполнено.

Однако целая функция, отвечающая такой последовательности по формуле (3), вообще говоря, не будет почти периодической*. Последнее обстоятельство может иметь место, даже если $\psi(x)$ периодическая. Это указывает на существенность условия 2.

Отметим, что целая функция экспоненциального типа $H \leqslant \pi$, ограниченная на всей вещественной оси, определяется своими значениями в целых точках с точностью до слагаемого $c \sin \pi z$ ($c = \text{const}$).

3. Условия 1 и 2 выполняются, если a_k определяются формулой (5), в которой $\psi(x)$ есть произвольная почти периодическая функция с абсолютно сходящимся рядом Фурье, ибо можно, не меняя значений функции $\psi(x)$ в целых точках, привести все показатели по модулю 2π так, чтобы они оказались в интервале $(0, 2\pi]$.

Более того, в этом случае имеет место

Теорема 4. *Пусть $\psi(x)$ — некоторая почти периодическая функция с абсолютно сходящимся рядом Фурье и $a_k = \frac{\pi}{\Delta} k + \psi(k)$ ($k = 0, \pm 1, \ldots, \Delta > 0$). Тогда функция $f(z)$, определенная равен-*

* Можно показать, что она будет почти периодической в смысле Б. Левитана (2).

ством (1), *есть функция класса* [Δ] *с абсолютно сходящимся рядом Фурье.*

Пример функции $g(x)$ (см. (4)) показывает, что обратная теорема не имеет места. Ввиду этого представляет интерес

Теорема 5. *Если ряд Фурье функции* $f(z)$ *класса* [Δ] *абсолютно сходится и последовательность* $\{a_k\}_{-\infty}^{\infty}$ *ее корней удовлетворяет условию*

$$\inf_k \operatorname{Re}(a_{k-1} - a_k) > 0,$$

то $a_k = \frac{\Delta}{\pi} k + \psi(k)$, *где* $\psi(x)$ — *почти периодическая функция с абсолютно сходящимся рядом Фурье.*

С помощью теорем 4 и 5 без труда устанавливается

Теорема 6. *Для того чтобы последовательность* $\{a_k\}_{-\infty}^{\infty}$ *нулей функции* $f(z)$ *класса* [Δ] *допускала представление* (4) *с функцией* $\psi(x)$, *разлагающейся в абсолютно сходящийся ряд Фурье, необходимо и достаточно, чтобы при любом натуральном* p *все множители функции* $f(z)$ *вида*

$$f_{p,r}(z) = \text{V. p.} \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_{kp+r}}\right) \quad (r = 0, 1, \ldots, p-1)$$

разлагались в абсолютно сходящиеся ряды Фурье.

Интересные применения некоторых результатов этой заметки в теории делителей почти периодических полиномов получены В. П. Потаповым (3).

Поступило
30 X 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 A. Besicovitch, Almost Periodic Functions, Cambridge, 932, p. 163. 2 Б. М. Левитан, Усп. матем. наук, 2, в. 6, 174 (1947). 3 В. Потапов, Збірник праць Інституту математики АН УРСР, № 11 (1948).