Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 3

МАТЕМАТИКА

Б. И. КОРЕНБЛЮМ

О НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ КОММУТАТИВНЫХ НОРМИРОВАННЫХ КОЛЬЦАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 XI 1948)

Как показал Н. Винер ([1]), ряд классических теорем тауберовского типа является следствием установленной им общей теоремы, дающей критерий плотности идеала I в кольцах $L^1(-\infty, \infty)$ и M (последнее состоит из непрерывных в интервале $(-\infty, \infty)$ функций $f(x)$, для которых $\|f\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \max_{n-1 \leqslant t \leqslant n} |f(t)| < \infty$). В 1941 г. Шилов в своей диссертации*, применяя методы И. Гельфанда теории коммутативных нормированных колец, значительно упростил доказательство тауберовской теоремы Винера для кольца $L^1(-\infty, \infty)$. В 1946 г. Годеман ([3]) обобщил теорему Винера на групповое кольцо произвольной локально компактной абелевой группы с мерой Хаара.

В настоящей заметке мы строим на локально компактной абелевой группе G, удовлетворяющей второй аксиоме счетности, класс коммутативных нормированных колец, определяемых функцией $\theta(x)$ $(x \in G)$ и показателем $p \geqslant 1$. В частном случае, когда G является аддитивной группой действительных чисел, а $\theta(x)$ совпадает с характеристической функцией интервала $(0, 1)$ и $p = 1$, наше кольцо $\tilde{R}$ эквивалентно винеровскому кольцу M. Далее мы устанавливаем теоремы, выясняющие общий вид линейного функционала на изучаемых кольцах и структуру множества их максимальных идеалов. Затем мы находим необходимое и достаточное условие плотности идеала в рассматриваемых кольцах, аналогичное условию Винера для колец L^1 и M. Как следствие отсюда получается обобщение теоремы Берлинга — Годемана ([3]).

Полученные результаты приводят к некоторым новым общим и специальным теоремам тауберовского типа, обобщающим ряд результатов Винера, Харди и Литтлвуда, Джекоба, Сасса и др.

1°. Обозначения и определения. G — коммутативная локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности; dx — мера Хаара на G; L^p $(p \geqslant 1)$ — пространство измеримых комплексных функций на G, суммируемых с p-й степенью; L^∞ — пространство существенно ограниченных функций на G; ω — формально присоединенная „бесконечно удаленная точка", превращающая топологическое пространство группы G в компакт.

Пусть $\theta(x)$ — неотрицательная измеримая по Беру суммируемая функция на G (класс таких функций будем обозначать Ξ). Введем

* См. также ([2]).

в рассмотрение следующие линейные нормированные пространства $\left(1 \leqslant p < \infty;\ q = \frac{p}{p-1};\ \text{при } p = 1 \quad q = \infty\right)$.

1) $M^p[G, \theta(x)]$ — пространство комплексных функций $\psi(x)$ на G, для которых

$$\| \psi \|_{M^p} = \operatorname*{vrai\,max}_{y \in G} \left[\int \theta(xy) \mid \psi(x) \mid^p dx \right]^{1/p} < \infty.$$

В качестве иллюстрации заметим, что в случае, когда G — аддитивная группа действительных чисел, а $\theta(x)$ — характеристическая функция интервала $(0, 1)$, пространства M^p становятся пространствами Степанова.

2) $H^p[G, \theta(x)]$ — подпространство предыдущего пространства, состоящее из функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих дополнительным условиям:

а) $\hat{\varphi}_y = [\theta(xy)]^{1/p} \varphi(x)$ как функция x принадлежит L^p при каждом $y \in G$ и является сильно непрерывной абстрактной функцией y;

б) $\| \hat{\varphi}_y \|_p = \left[\int \theta(xy) \mid \varphi(x) \mid^p dx\right]^{1/p} \to 0$ при $y \to \omega$;

3) $R^p[G, \theta(x)]$ — пространство, сопряженное с $H^p[G, \theta(x)]$.

Из результатов С. Г. Крейна, Б. Я. Левина и автора [4] нетрудно вывести, что общий вид линейного функционала на H^p задается формулой

$$f(\varphi) = \int f(x) \varphi(x)\, dx, \tag{1}$$

где $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = \tau(x) \left[\int_G \theta(xy) \mu(dy) \right]^{1/p} \quad (\tau \in L^q), \tag{2}$$

$\mu(dy)$ — вполне аддитивная положительная конечная мера на теле борелевских множеств группы G. При этом

$$\| f \| = \| f \|_{R^p} = \min \{ \| \tau \|_q [\operatorname{var} \mu]^{1/p} \}, \tag{3}$$

где минимум достигается и берется по всем представлениям функции $f(x)$ в виде (2).

4) $\tilde{R}[G, \theta(x)]$ — подпространство предыдущего пространства при $p = 1$, состоящее из непрерывных функций.

Класс ограниченных на G функций $\theta(x) \in \Xi$ будем обозначать Ξ^*. Пусть $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ некоторая последовательность компактных окрестностей единицы e группы G такая, что $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Будем говорить, что функция $\theta(x)$ принадлежит классу Ξ^{**}, если $\theta(x) \in \Xi^*$ и

$$\| \theta_i(x) \|_{R^1} \to 0 \qquad (i \to \infty), \tag{4}$$

где

$$\theta_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in U_i, \\ \theta(x) & \text{при } x \overline{\in} U_i. \end{cases} \tag{5}$$

2°. Теорема 1. *Если $\theta(x) \in \Xi$, то все R^p $(p \geqslant 1)$ содержатся* *в L^1, плотны в нем и являются алгебраическими идеалами кольца L^1. Далее, справедливы неравенства:*

$$\| f * g \|_{R^p} \leqslant \| f \|_{R^p} \| g \|_1; \quad \| f \|_1 \leqslant \left[\int \theta(x)\,dx \right]^{1/p} \| f \|_{R^p} \quad (f \in R^p,\ g \in L^1) \tag{6}$$

Пространства R^p, в которые введена операция свертывания в качестве умножения элементов, являются коммутативными нормированными кольцами (вообще, без единицы, кроме случая дискретной группы G). Если $\theta(x) \in \Xi^*$, то все утверждения теоремы справедливы и для $\breve{R}$.

Теорема 2. *Пусть $\theta(x) \in \Xi^*$ и $p > 1$. Тогда всякий линейный функционал $\psi(f)$ на R^p имеет вид:*

$$\psi(f) = \int \psi(x) f(x)\,dx \quad (\psi(x) \in M^p[G, \theta(x)]). \tag{7}$$

Обратно, каждая функция $\psi \in M^p$ определяет по формуле (7) линейный функционал R^p с нормой

$$\| \psi \| = \| \psi \|_{M^p}. \tag{8}$$

Теорема 3. *Пусть $\theta(x) \in \Xi^{**}$ и полунепрерывна снизу. Тогда всякий линейный функционал $F(f)$ на $\breve{R}$ имеет вид:*

$$F(f) = \int_G f(x)\,\nu(dx), \tag{9}$$

где $\nu(dx)$ — абсолютно аддитивная (вообще, неограниченная) мера на теле борелевских множеств группы G такая, что

$$\sup_{y \in G} \int_G \theta(xy)\, | \mu(dx) | < \infty. \tag{10}$$

Обратно, всякая мера $\nu(dx)$, удовлетворяющая неравенству (10), определяет по формуле (9) линейный функционал на $\breve{R}$ с нормой, равной левой части (10).

3°. Будем обозначать через R^p_e, $\breve{R}_e$, соответственно, кольца R^p, $\breve{R}$, если группа G дискретна, и эти же кольца с присоединенной единицей, если G не дискретна.

Теорема 4. *Если $\theta(x) \in \Xi^*$ и $p > 1$, то максимальные идеалы кольца R^p_e, отличные от R^p, порождаются характерами группы G, и обратно. При этом каждому характеру $\chi(x)$ группы G соответствует максимальный идеал, состоящий из элементов $\lambda e + f(x)$, для которых*

$$\lambda + \int f(x) \chi(x) dx = 0. \tag{11}$$

Если $\theta(x) \in \Xi^{**}$, то теорема справедлива и для кольца $\breve{R}_e$.

Теорема 5. *Если $\theta(x) \in \Xi^*$ и $p > 1$, то для того, чтобы идеал I кольца R^p (или линейное подмножество пространства R^p, инвариантное относительно операции сдвига) был плотен в R^p, необходимо и достаточно, чтобы для каждого характера χ группы G существовал элемент $f \in I$ такой, что его преобразование Фурье* *отлично от нуля на выбранном характере* χ. *Если* $\theta(x) \in \Xi^{**}$, *то теорема справедлива и для кольца* $\tilde{R}$.

Простым следствием последней теоремы, теоремы 3 и известного факта теории пространства Банаха (5) является следующее обобщение теоремы Берлинга:

Теорема 6. *Пусть* $\theta(x) \in \Xi^{*}$ *и* $p > 1$. *Тогда всякое отличное от нуля слабо замкнутое подпространство* V *пространства* M^p, *инвариантное относительно операции сдвига, содержит по меньшей мере один характер группы* G.

Поступило
18 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Wiener, Ann. of Math., 2-nd ser., **33**, 1 (1932). [2] Г. Е. Шилов, О регулярных нормированных кольцах, М., 1947. [3] R. Godement, C. R., **223**, 16 (1946). [4] Б. И. Коренблюм, С. Г. Крейн и Б. Я. Левин, ДАН, **62**, № 1 (1948). [5] С. Банах, Курс функціонального аналізу, Киев 1948