Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 3

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. О. ГЕЛЬФОНД

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТЕПЕНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

В то время как трансцендентность значений в алгебраических точках целых функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям и имеющих рациональные с не слишком большими знаменателями коэффициенты ряда Тейлора в нуле, тесно связана и часто есть следствие алгебраической независимости этих значений в поле рациональных чисел, аналогичная связь между трансцендентностью значений и их алгебраической независимостью для показательных функций с алгебраическим основанием почти отсутствует. Поэтому непосредственное применение метода, послужившего мне для доказательства трансцендентности чисел α^β при $\alpha \neq 0,1$ и алгебраическом и β алгебраическом иррациональном ([1]), к вопросу об алгебраической независимости различных чисел этого вида не давало результатов. В настоящей работе я хочу вкратце изложить новый метод, который может быть использован для решения подобных вопросов. Для демонстрации этого метода я приведу достаточно подробно доказательство одной достаточно общей теоремы этого типа.

Теорема. *Если α есть корень неприводимого алгебраического уравнения третьей степени, а $a \neq 0,1$ есть произвольное алгебраическое число, то числа $a^\alpha = e^{\alpha \ln a}$ и $a^{\alpha^2} = e^{\alpha^2 \ln a}$, где $\ln a$ есть любое, но фиксированное значение логарифма, алгебраически независимы в поле рациональных чисел.*

Для доказательства этого предложения мы предположим, что существует неприводимый в поле рациональных чисел полином от двух переменных $P(x, y)$ с целыми рациональными коэффициентами такой, что $P(x, y) = 0$ при $x = \omega = a^\alpha$, $y = \omega_1 = a^{\alpha^2}$. Этот полином будет содержать и x и y, так как уже ранее было доказано, что ω_1 и ω трансцендентные числа ([1]). Само доказательство мы разобьем на ряд этапов — лемм, которые и приведем ниже.

В дальнейшем постоянные $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_8$ зависят только от α, ω и $P(x, y)$.

Лемма 1. *Если $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_s(x)$ — полиномы степеней $n_1, n_2, \ldots, n_s$ с высотами $H_1, H_2, \ldots, H_s$, а высота полинома $h(x) = \prod_1^s h_\nu(x)$ есть H, то эти величины связаны соотношениями*

$$H > e^{-n} H_1 H_2 \ldots H_s, \quad n = n_1 + n_2 + \ldots + n_s. \tag{1}$$

Высотой мы называем максимум модуля коэффициентов полинома. Эта лемма есть простое обобщение леммы, доказанной в моей работе по апроксимации алгебраических иррациональностей (лемма 4) ([2]).

Лемма 2. *Каково бы ни было целое $q > q'[\omega, a, P(x, y)]$, всегда можно построить функцию $f(z)$, удовлетворяющую условиям:*

1) *все C_{k_0, k_1, k_2, k_3} целые рациональные*;

$$2)\ f(z) = \sum_{k_1=0}^{q}\sum_{k_2=0}^{q}\sum_{k_3=0}^{q} A_{k_1, k_2, k_3}\, e^{(k_1+k_2\alpha+k_3\alpha^2)\eta z} \neq 0.$$

$$\eta = \ln a, \quad A_{k_1, k_2, k_3} = \sum_{0}^{q_1} C_{k_0, k_1, k_2, k_3}\omega^{k_0}, \quad q_1 = [q^{1/2}\ln^{1/4} q],$$

$$| C_{k_0, k_1, k_2, k_3} | < \exp\,[2q^{3/2}\ln^{1/4} q]; \tag{2}$$

$$3)\ f^{(s)}(t) = 0, \quad t = l_0 + l_1\alpha + l_2\alpha^2, \quad 0 \leqslant l_i \leqslant q_1, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$0 \leqslant s \leqslant s_0 = [q^{3/2}\ln^{-3/4} q], \quad \lambda_0 = \lambda_0[\alpha, \omega, P(x, y)].$$

Эта функция может быть весьма просто построена с помощью принципа Дирихле, учитывая алгебраичность α, a и соотношение $P(\omega, \omega_1) = 0$, с помощью леммы 1 моей работы ([2]).

Лемма 3. *Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Тогда среди чисел $f^{(s)}(t)$,*

$$0 \leqslant s \leqslant s_1 = [4q^{3/2}\ln^{-3/4} q]; \quad t = \sum_{0}^{2} l_k\alpha^k; \quad 0 \leqslant l_i \leqslant q_1, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

найдется хотя бы одно число, отличное от нуля при $q > q'(\alpha, \omega, P)$.

Для доказательства допустим, что все эти числа равны нулю. Запишем функцию $f(z)$ в форме

$$f(z) = \sum_{0}^{N-1} B_k e^{\tau_k z}, \tau_k = (k_1 + k_2\alpha + k_3\alpha^2)\eta, \quad 0 \leqslant k_i \leqslant q, \quad N = (q+1)^3,$$

$$B_k = A_{k_1, k_2, k_3}, \quad \max_{0 \leqslant k \leqslant N-1} | B_k | = | B_\nu | > 0. \tag{4}$$

Введем обозначения

$$Q(x) = \prod_{i=0}^{N}(x - \tau_l) \qquad \frac{Q(x)}{x - \tau_k} = \sum_{0}^{N-1} C_{k,s}x^s. \tag{5}$$

Тогда мы будем иметь представление

$$-B_\nu = \frac{1}{4\pi^2 Q'(\tau_\nu)}\sum_{s=0}^{N-1} s!\, C_{\nu, s}\int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma}\prod_{0}^{q_1}\prod_{0}^{q_1}\prod_{0}^{q_1}\left[\frac{x - (k_1 + k_2\alpha + k_3\alpha^2)}{z - (k_1 + k_2\alpha + k_3\alpha^2)}\right]^{s_1}\frac{f(z)\,dz\,dx}{x^{s+1}(z - x)}, \tag{6}$$

где Γ_0 есть окружность $| x | = 1$, Γ_1 — окружность $| z | = N/q$. Пользуясь для оценки $Q'(\tau_\nu)$ снизу тем обстоятельством, что $| k_1 + k_2\alpha + k_3\alpha^2 | > \lambda_1 k^{-2}$, $| k_i | \leqslant k$ в силу того, что α кубическая иррациональность, и оценивая интегралы справа по модулю, мы приходим к неравенству

$$1 < \exp[-q^3(\ln q - \lambda_2 \ln\ln q)], \tag{7}$$

откуда при $q > q''(\alpha, \omega, P)$ и следует наша лемма.

Лемма 4. *Если функция удовлетворяет условиям леммы 2, то выполняются неравенства при* $q > q^{(3)}$ (α, ω, P):

$$
\begin{gathered}
|\eta^{-s} f^{(s)}(t)| < e^{-\frac{1}{2}\lambda_{\circ} q^{3}\ln q}, \quad 0 \leqslant s \leqslant [4q^{3/2}\ln^{-3/4} q], \\
t = k_1 + k_2\alpha + k_3\alpha^2; \quad 0 \leqslant k_i \leqslant q_1, \ i = 1,\ 2,\ 3.
\end{gathered} \tag{8}
$$

Действительно, мы имеем представление

$$
f^{(s)}(t) = -\frac{s!}{4\pi^2}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma_1}\prod_{0}^{q_1}\prod_{0}^{q_1}\prod_{0}^{q_1}\left[\frac{x - k_1 - k_2\alpha - k_3\alpha^2}{z - k_1 - k_2\alpha - k_3\alpha^2}\right]^{s_0}\frac{f(z)\,dz\,dx}{(x-t)^{s+1}(z-x)}, \tag{9}
$$

где Γ есть окружность $|x| = \sqrt{q\ln q}$, а Γ_1 — окружность $|z| = q^2$. Оценивая по модулю интегралы в правой части, мы получим неравенства (8).

Лемма 5. *Каково бы ни было целое число* $q > q^{(4)}(\alpha, \omega, P)$, *для числа* $\omega = a^{\alpha}$ *всегда существует полином с не имеющими общего делителя целыми рациональными коэффициентами* $P(x)$, *степени* n *и высоты* H, *такой, что*

$$
0 < |P(\omega)| < e^{-\frac{1}{4}\lambda_{\circ} q^{3}\ln q}, \quad \max[n,\ \ln H] < \lambda_4 q^{3/2}\ln^{1/4} q. \tag{10}
$$

Действительно, по лемме 3 существует $f^{(s)}(x)$, отличное от нуля при s и t, удовлетворяющим условиям (3) этой леммы. Тогда мы будем иметь, что

$$
T_0^{\gamma_0 qq_1}\eta^{-s}f^{(s)}(t) = T(\alpha, a^{1/\nu}, \omega, \omega_1), \quad \max[n_1, n_2, \ln H_0] < \lambda_5 q^{3/2}\ln^{1/4} q, \tag{11}
$$

где T есть полином с целыми алгебраическими коэффициентами степеней n_1 и n_2 относительно ω и ω_1, высоты H; γ_0 не зависит от q; ν есть общее наименьшее кратное знаменателей в выражениях α^4 и α^3 через 1, α, α^2, а T_0 — целое число такое, что $T_0\,\alpha$ и $T_0\,a^{1/\nu}$ будут целыми алгебраическими. Неравенства для H, n_1 и n_2 непосредственно следуют из лемм 2 и 3. Пусть $y = \varphi(x)$ будет та ветвь алгебраической функции, удовлетворяющей уравнению $P(x, y) = 0$, для которой $\omega_1 = \varphi(\omega)$. Рассмотрим приведенное поле, полученное от присоединения к полю рациональных функций с целыми рациональными коэффициентами чисел α, $a^{1/\nu}$ и функции $\varphi(x)$. Беря норму полинома $T[\alpha, a^{1/\nu}, \omega, \varphi(\omega)]$ в этом поле и умножая ее на соответствующую степень старшего коэффициента $P(x, y)$, мы получим полином уже с целыми рациональными коэффициентами $P_1(x)$, удовлетворяющий условиям

$$
0 < |P_1(\omega)| < e^{-\frac{1}{8}\lambda_0 q^{3}\ln q} \quad \max[n, \ln H] < \lambda_6 q^{3/2}\ln^{1/4} q, \tag{12}
$$

$$
P(x) = \frac{1}{D}P_1(x),
$$

где H — его высота, n — степень, D — общий наибольший делитель коэффициентов $P_1(x)$.

Лемма 6. *Каково бы ни было целое* $q > q^{(5)}$, *всегда существует неприводимый полином с целыми рациональными без общего делителя коэффициентами, удовлетворяющий условиям:*

$$
0 < |R(\omega)| < e^{-\lambda_7\sigma^3\sqrt{\ln q}}, \quad \max[n_1, \ln H_1] < \sigma, \quad \sigma < \lambda_8 q^{3/2}\ln^{1/4} q, \tag{13}
$$

где H_1 — *высота* $R(x)$, n_1 — *его степень,* $\lambda_7 > 0$. *Очевидно, что* σ *растет неограниченно вместе с* q.

Для доказательства разобьем полином $P(x)$ леммы 5 на неприводимые множители: $P(x) = R_1(x) R_2(x) \dots R_s(x)$. Пусть высоты этих полиномов будут $H_1, H_2, \dots, H_s$, степени $n_1, n_2, \dots, n_s$.

Положим также $m_i = \ln H_i$ и допустим, что минимум выражений $|R_i(\omega)|^{1/(m_i+n_i)^2}$ достигается при $i = 1$. Тогда очевидно, что

$$|P(\omega)|^{(n_1+m_1)^2/m} > |R_1(\omega)|,$$
$$m = \sum_1^s (n_i + m_i)^2 < n^2 + 2n \sum_1^s m_i + \left(\sum_1^s m_i\right)^2. \tag{14}$$

Из неравенств (12) и леммы 1 тогда следует, что

$$|R_1(\omega)| < e^{-\lambda_7 \sigma^2 \sqrt{\ln q}}, \quad \sigma = \max[n_1, \ln H_1] = O(q^{3/2} \ln^{1/4} q), \tag{15}$$

что и доказывает лемму.

Теперь уже можно доказать очень легко нашу теорему. Действительно, для сколь угодно больших q и $\sigma = \sigma(q)$ можно построить полином $R(\omega)$, удовлетворяющий условиям леммы 6. По лемме 5 всегда можно построить полином, удовлетворяющий условиям

$$|P(\omega)| < e^{-\frac{1}{8}\lambda_8 r^3 \ln r}, \quad \max[n, \ln H] < \lambda_6 r^{3/2} \ln^{1/4} r, \quad r = [\sigma^{2/3} \ln^{-1/4} \sigma].$$

Сравнивая высоты и степени $R(x)$ и $P(x)$ при $\sigma > \sigma_0$, мы видим, что $R(x)$ и $P(x)$ взаимно просты, так как $P(x)$ не может делиться на $R(x)$. Строя их резольвенту, благодаря условиям (16) и (15), мы легко получим также, что она равна нулю. Это противоречие доказывает нашу теорему.

Пусть $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu$ — базис кольца целых чисел алгебраического поля K, причем пусть ω_1 рационально. Без изменения хода доказательства следует, что все числа $a^{\omega_2}, a^{\omega_3}, \dots, a^{\omega_\nu}$ не могут алгебраически быть выражены в рациональном поле через одно из них при $a \neq 0,1$ и алгебраическом.

При некотором изменении доказательства можно получить пока неполный результат, именно, что среди этих $\nu - 1$ чисел имеется не менее $\left[\frac{\nu+1}{2}\right]$ алгебраически независимых. Эти, а также некоторые другие результаты, которые могут быть получены приведенным методом, будут рассмотрены мною в другом месте.

Математический институт
им. В. А. Стеклова Академии наук СССР

Поступило
27 XII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. О. Гельфонд, ДАН, № 2 (1934). [2] А. О. Гельфонд, Вестн. МГУ, № 9 (1948).