Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 4

ГИДРАВЛИКА

Н. Н. ВЕРИГИН

РАСЧЕТ ДРЕНЫ В ПОТОКЕ ГРУНТОВЫХ ВОД С УЧЕТОМ ВЫСОТЫ ВЫСАЧИВАНИЯ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 2 XII 1949)

При исследовании действия дрен в потоке грунтовых вод расчетная модель дрены обычно принимается в виде горизонтальной щели или в виде точечного стока. Вследствие этого высота выхода (высачивания) грунтовой воды в дрену не может быть определена. Между тем, как и в земляных плотинах и перемычках, высота участка выхода в дренажах представляет принципиальный интерес, а также имеет практическое инженерное значение, поскольку отсыпку дренирующего материала в дрену нет надобности делать выше максимальной высоты высачивания.

Ниже рассматривается дрена в виде вертикальной щели, находящаяся в потоке грунтовых вод неограниченной мощности. Глубину воды в дрене примем равной нулю. Будем далее считать, что грунтовый поток течет из бесконечности справа, где напор его $h=\infty$, в бесконечность слева, где напор $h=-\infty$ (рис. 1).

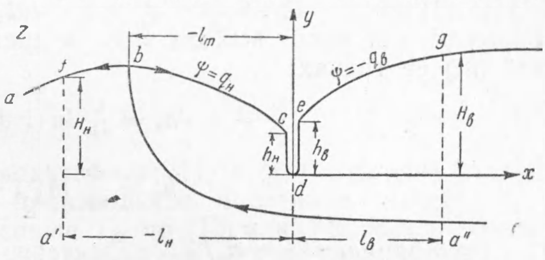

Рис. 1

Как показывает исследование, при такой постановке задачи депрессионная кривая на своей низовой ветви ca может иметь точку разветвления b (рис. 1), в которой скорость фильтрации равна нулю, а напор имеет максимум.

Кроме того, из исследования вытекает, что при неограниченной длине потока гидромеханическое решение данной задачи будет содержать два неопределенных параметра. Чтобы выяснить численные значения этих параметров, необходимо принять определенные граничные условия в области питания грунтового потока и в области его стока. Иначе говоря, в полученном решении, в соответствии с реальной длиной водоносного пласта, следует принять, что поток ограничен с верховой стороны (при $x=l_в$) линией равного напора $h=H_в$, а с низовой стороны (при $x=-l_н$) — линией равного напора $h=H_н$. Эти линии будут близки к вертикальным прямым ga'' и fa' (рис. 1). Для определенности решения достаточно также ограничить грунтовый поток лишь с одной его стороны (низовой или верховой) и принять дополнительно, что уклон потока на бесконечности равен естественному уклону потока J до устройства дрены и потому является известным.

Решение задачи может быть получено из рассмотрения течения в области аналитической функции Н. Е. Жуковского

$$\theta = -(kz + iw) = (\psi - kx) + i(-ky - \varphi) \tag{1}$$

и в области ее производной

$$F = -i\frac{dz}{d\theta} = \frac{v_x}{v_x^2 + (v_y + k)^2} + i\frac{v_y + k}{v_x^2 + (v_y + k)^2}, \tag{2}$$

где $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал, $z = x + iy$ — комплекс потока, v_x и v_y — компоненты скорости фильтрации, k — коэффициент фильтрации.

Данное течение в области θ изображается полуплоскостью, а в области F — бесконечной полосой, у которой бесконечно удаленные точки соответствуют точкам касания кривой депрессии к боковым граням дрены c и e.

Конформное отображение F на θ дает:

$$F = -i\frac{dz}{d\theta} = -\frac{A}{Q}\ln\frac{(q_в + \theta)\,q_н}{(q_н - \theta)\,q_в} + C, \tag{3}$$

где $q_в$ и $q_н$ — расходы воды, поступающие в дрену соответственно с верховой и низовой ее сторон, $Q = q_в + q_н$ — полный расход дрены, A и C — постоянные.

Интегрирование (3) и исключение постоянных при условии, что в точке низа дрены $F = \theta = z = 0$, приводит к уравнению:

$$z = \frac{i}{\pi k}\left[(q_в + \theta)\ln\frac{q_в + \theta}{q_в} + (q_н - \theta)\ln\frac{q_н - \theta}{q_н}\right], \tag{4}$$

где θ определяется выражением (1).

Из (4) при $z = ih_в$, $\theta = -q_в$ и $z = ih_н$, $\theta = q_н$ получаются следующие формулы для высот выхода воды в дрену на верховой ($h_в$) и низовой ($h_н$) ее гранях:

$$h_в = \frac{Q}{\pi k}\ln(1 + \alpha), \tag{5}$$

$$h_н = \frac{Q}{\pi k}\ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \tag{6}$$

где коэффициент $\alpha = q_в / q_н$ характеризует относительную эффективность верховой грани дрены по сравнению с низовой и может быть назван коэффициентом асимметрии течения.

Полагая в (4) $z = x + iy$, $w = -ky - iq_в$ (для верховой ветви депрессионной кривой), а также $w = -ky + iq_н$ (для низовой ее ветви) и отделяя вещественные и мнимые части, получим:

а) уравнение верховой ветви депрессионной кривой

$$y = \frac{Q}{\pi k}\left[\ln\left(1 + \frac{kx}{Q}\right)(1 + \alpha) + \frac{kx}{Q}\ln\left(1 + \frac{Q}{kx}\right)\alpha\right]; \tag{7}$$

б) уравнение низовой ветви депрессионной кривой

$$y = \frac{Q}{\pi k}\left[\ln\left(1 - \frac{kx}{Q}\right)\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{kx}{Q}\ln\left(1 - \frac{Q}{kx}\right)\frac{1}{\alpha}\right]. \tag{8}$$

Абсцисса точки разветвления на низовой ветви депрессионной кривой найдется по (8) из условия $dy/dx = 0$ и будет:

$$x_m = \frac{Q}{k(1 - \alpha)}. \tag{9}$$

Высота депрессии (напор) в точке разветвления b по (8) и (9) составит:

$$y_{\max} = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}. \tag{10}$$

Подставляя в (7) $x = l_в$, $y = H_в$ и в (8) $x = -l_н$, $y = H_н$, получим:

$$Q = \pi k \frac{H_в - \frac{l_в}{\pi} \ln \left(1 + \frac{Q}{kl_в}\right) \alpha}{\ln \left(1 + \frac{kl_в}{Q}\right)(1 + \alpha)}, \tag{11}$$

$$Q = \pi k \frac{H_н - \frac{l_н}{\pi} \ln \left(1 + \frac{Q}{kl_н}\right) \frac{1}{\alpha}}{\ln \left(1 + \frac{kl_н}{Q}\right)\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}. \tag{12}$$

Приравнивая правые части (11) и (12) и решая полученное уравнение относительно α, будем иметь:

$$\ln \alpha = \frac{\pi (H_в - H_н) \frac{k}{Q} + \left(1 + \frac{kl_н}{Q}\right)(\ln \left(1 + \frac{Q}{kl_н}\right) - \left(1 + \frac{kl_в}{Q}\right) \ln \left(1 + \frac{Q}{kl_в}\right) - \ln \frac{l_в}{l_н}}{1 + \frac{kl_н}{Q} + \frac{kl_в}{Q}}. \tag{13}$$

Если в (13) разложить в ряды логарифмы, зависящие от Q, ограничиться первыми членами этих рядов и пренебречь единицей в знаменателе, то с достаточной степенью точности будет:

$$\ln \alpha \cong \pi J_{cp} - \frac{Q}{kL} \ln \frac{l_в}{l_н} + \left(\frac{Q}{k}\right)^2 \frac{l_в - l_н}{L l_в l_н}, \tag{14}$$

где

$$J_{cp} = \frac{H_в - H_н}{L}, \quad L = l_в + l_н. \tag{15}$$

Определение α и Q производится по (11) и (13) или (14) следующим образом: а) принимается произвольное численное значение Q/k (чаще всего величина Q/k меньше 1), по (13) или (14) определяется α и по (11) находится Q/k; б) при найденном Q/k снова подсчитываются α по (13) или (14) и Q/k по (11) и т. д. Обычно второе приближение дает достаточно точный результат для α и Q.

Далее находятся величины $q_н$ и $q_в$:

$$q_н = \frac{Q}{1 + \alpha}, \quad q_в = \alpha q_н = \frac{\alpha Q}{1 + \alpha}. \tag{16}$$

Затем по (5) и (6) определяются величины $h_в$ и $h_н$, по (9) и (10) находятся x_m и $y_{\max}$, а по (7) и (8) строятся верховая и низовая ветви депрессионной кривой.

Для простейшего частного случая $H_в = H_н = H$, $l_в = l_н = l$ из (13), (5), (6), (11) получим:

$$\alpha = 1, \quad h_в = h_н = h_0, \quad Q/k = \pi h_0 / \ln 2; \tag{17}$$

$$\frac{H}{l} = \frac{1}{\pi} \ln \left(1 + \frac{h_0}{l} \frac{\pi}{\ln 2}\right) + \frac{h_0}{l} \left[1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{l}{h_0} \frac{\ln 2}{\pi}\right)}{\ln 2}\right], \tag{18}$$

что совпадает с результатами, приводимыми в работе ([2]).

Из (18) по известным H и l можно найти высоту высачивания h_0.

Предположим далее, что в рассматриваемом случае на уровне низа дрены находится непроницаемый подстилающий слой. Тогда дрена будет совершенной и обе ее грани будут работать независимо. В этом случае, согласно исследованию для прямоугольной перемычки ([3]), при $l/H > 1$ высота высачивания h_0 определяется следующим образом:

$$h_0 = \frac{1}{1,346}\,\frac{q}{k} = 0,743\,\frac{q}{k}\,, \tag{19}$$

где q — приток воды в дрену с одной ее стороны. Величина q, согласно ([4]), достаточно точно определяется по формуле:

$$\frac{q}{k} = \frac{H^2}{2l}\,. \tag{20}$$

Из (19) и (20) имеем:

$$\frac{h_0}{l} = 0,371\,\frac{H^2}{l^2}\,. \tag{21}$$

В табл. 1 сопоставлены относительные высоты участков высачивания h_0/l, найденные по (18) для несовершенной дрены при неограниченной мощности водоносного слоя и по (21) для совершенной дрены, уложенной на водоупоре.

Таблица 1

H/l	h_0/l	
	несовершен. дрена	совершен. дрена
0,0119	0,0012	0,00015
0,020	0,0022	0,00024
0,033	0,0040	0,00040
0,058	0,0080	0,0012
0,103	0,017	0,0040
0,142	0,025	0,0074
0,178	0,034	0,012
0,216	0,044	0,017
0,270	0,060	0,027

Из табл. 1 видно, что при неограниченной мощности водоносного слоя высота высачивания больше, чем при ограниченной его мощности. При $H/l < 0,033$, значения h_0 в рассмотренных случаях совершенной и несовершенной дрены отличаются более чем в 10 раз. Ввиду этого можно полагать, что наличие водоупора понижает депрессионную кривую (по крайней мере, вблизи дрены). Впрочем, если рассматривать несовершенную дрену конечной ширины (а не узкую дрену, как было принято выше), то возможно и обратное явление. Именно, при широкой несовершенной дрене, вследствие поступления воды через ее дно, высота высачивания может оказаться и меньше, чем в случае совершенной дрены. Тогда депрессионная кривая вблизи несовершенной дрены будет ниже, чем вблизи дрены, расположенной на водоупоре.

Кроме того, из табл. 1 видно, что при малых H/l абсолютные значения высот выклинивания h_0 весьма малы.

Отсюда следует, что высоты участков выхода для несовершенных дрен при наличии водоупора приближенно могут определяться по уравнениям (5) и (6), так как при этом в расчетах обеспечивается некоторый запас (величины $h_в$ и $h_н$ находятся с преувеличением).

Поступило
20 V 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Е. Жуковский, Просачивание воды через земляные плотины, 1923. [2] В. В. Ведерников, Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа, 1939. [3] П. Я. Полубаринова-Кочина, Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод, 1942. [4] Ф. Б. Нельсон-Скорняков, Фильтрация в однородной среде, 1947.