Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 4

МАТЕМАТИКА

А. В. ШТРАУС

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 8 XII 1949)

1. Как известно из элементов теории аналитических функций, при изучении функции $f(z)$, регулярной в единичном круге и меньшей по модулю единицы, полезно ввести в рассмотрение функцию $g(z)$, определяемую формулой:

$$g(z)=e^{i\vartheta}\frac{f(z)-\alpha}{1-\bar{\alpha}f(z)} \quad (|z|<1), \tag{1}$$

где $\alpha=f(0)$, а ϑ — произвольное вещественное число.

Применяя лемму Шварца, можно этим путем установить, например, некоторые простые неравенства для функции $f(z)$ и ее производной.

Пусть $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_1'$ — произвольные унитарные пространства, а $F(z)$ — линейный оператор из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_1'$, являющийся регулярной функцией комплексного параметра z ($|z|<1$) и не превосходящий по норме единицы.

В настоящей заметке мы рассматриваем преобразование, которое, аналогично формуле (1), ставит в соответствие оператор-функции $F(z)$ регулярную оператор-функцию $G(z)$, причем $\|G(z)\|\leqslant|z|$.

Отметим, что рассматриваемые здесь пространства могут быть и несчетномерными.

2. Рассмотрим сначала несколько вспомогательных предложений.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{H}_i$, $\mathfrak{H}_i'$ ($i=1, 2$) — произвольные унитарные пространства, такие, что* $\dim\mathfrak{H}_1+\dim\mathfrak{H}_2=\dim\mathfrak{H}_1'+\dim\mathfrak{H}_2'$.

Пусть, далее, V — произвольный изометрический оператор, отображающий $\mathfrak{H}_1\oplus\mathfrak{H}_2$ на $\mathfrak{H}_1'\oplus\mathfrak{H}_2'$, а V_{ik} ($i, k=1, 2$) — операторы из $\mathfrak{H}_k$ в $\mathfrak{H}_i'$, которыми определяется оператор V.*

Тогда, каков бы ни был линейный оператор F из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_1'$ ($\mathfrak{D}(F)=\mathfrak{H}_1$) с нормой $\|F\|<1$, оператор G из $\mathfrak{H}_2'$ в $\mathfrak{H}_2$, определенный формулой

$$G=V_{22}^*+V_{12}^*F\left(E-V_{11}^*F\right)^{-1}V_{21}^*,$$

не превосходит по норме единицы.

Доказательство вытекает из легко проверяемого равенства:

$$G+M=V^*(E+FM),$$

где $M=\left(E-V_{11}^*F\right)^{-1}V_{21}^*$.

---

* Оператор V определяется с помощью операторов V_{ik} следующим образом: $V\varphi_k=V_{1k}\varphi_k+V_{2k}\varphi_k$ ($\varphi_k\in\mathfrak{H}_k$; $k=1, 2$).

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{H}_i$, $\mathfrak{H}_i'$ $(i=1, 2)$ — произвольные унитарные пространства, удовлетворяющие условию:* $\dim \mathfrak{H}_1 = \dim \mathfrak{H}_2'$ *и* $\dim \mathfrak{H}_2 = \dim \mathfrak{H}_1'$, *а V — изометрический оператор, отображающий $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ на $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$ так, что*

$$\text{из } V\varphi_i \in \mathfrak{H}_i', \ \varphi_i \in \mathfrak{H}_i \ \text{ следует } \varphi_i = 0 \quad (i=1, 2). \tag{2}$$

Пусть, далее, $F(z)$ — оператор из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_1'$, являющийся регулярной функцией от z $(|z|<1)$, не превосходящий по норме единицы и связанный с оператором V равенством $F(0)=V_{11}$.

Тогда при любом z $(|z|<1)$

$$\mathfrak{R}\left(E - V_{11}^* F(z)\right) \subset \mathfrak{R}\left(V_{21}^*\right)$$

и

$$\overline{\mathfrak{R}\left[\left(V_{21}^*\right)^{-1}\left(E - V_{11}^* F(z)\right)\right]} = \mathfrak{H}_2'.$$

Заметим, прежде всего, что, в силу условия (2), операторы V_{12}^{-1}, V_{21}^{-1}, $(V_{12}^*)^{-1}$ и $(V_{21}^*)^{-1}$ все существуют и имеют области определения, плотные в соответствующих пространствах.

Для доказательства леммы, взяв произвольный элемент $\psi \in \mathfrak{R}(V_{21})$, по норме равный единице, вводим в рассмотрение функцию

$$f(z) = \left(\left[E - V_{11}^* F(z)\right] V_{21}^{-1}\psi,\ V_{21}^{-1}\psi\right) \quad (|z|<1).$$

Так как при любом z $\operatorname{Re} f(z) > 0$ и $f(0)=1$, то

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Поскольку ψ произвольно, это неравенство позволяет установить справедливость обоих утверждений леммы 2.

С помощью лемм 1 и 2 нетрудно доказывается следующее предложение.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{H}_i$, $\mathfrak{H}_i'$ $(i=1, 2)$, V и $F(z)$ — те же, что и в лемме 2.*

Пусть, далее, $\{r_n\}$ — произвольная, сходящаяся к единице последовательность вещественных чисел, удовлетворяющих при любом n $(n=1, 2, \ldots)$ неравенству $0<r_n<1$.

Тогда последовательность оператор-функций

$$G_n(z) = V_{22}^* + r_n V_{12}^* F(z)\left[E - r_n V_{11}^* F(z)\right]^{-1} V_{21}^*$$

слабо сходится для любого z $(|z|<1)$, причем

$$G_n(z)\psi \xrightarrow{\text{сл}} \left[V_{22}^* + V_{12}^* F(z)\left(E - V_{11}^* F(z)\right)^{-1} V_{21}^*\right]\psi,$$

каков бы ни был элемент $\left[\psi \in \mathfrak{R}\left[\left(V_{11}^*\right)^{-1}\left(E - V_{11}^* F(z)\right)\right]\right]$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{H}_i$, $\mathfrak{H}_i'$ $(i=1, 2)$ и V — те же, что и в лемме 2. Если $F(z)$ — произвольный оператор из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_1'$, являющийся регулярной функцией от z $(|z|<1)$, не превосходящий по норме единицы и удовлетворяющий условию*

$$F(0) = V_{11}, \tag{3}$$

то оператор $G(z)$ из $\mathfrak{H}_2'$ в $\mathfrak{H}_2$, определенный формулой

$$G(z) = \overline{V_{22}^* + V_{12}^* F(z)\left(E - V_{11}^* F(z)\right)^{-1} V_{21}^*}, \tag{4}$$

является регулярной функцией от z $(|z|<1)$ *и*

$$\|G(z)\| \leqslant |z|. \tag{5}$$

Соотношение (4) *однозначно разрешимо относительно* $F(z)$:

$$F(z) = V_{11} + V_{12}G(z)(E - V_{22}G(z))^{-1}V_{21}. \tag{6}$$

Обратно, если задан произвольный оператор $G(z)$ *из* $\mathfrak{H}_2'$ *в* $\mathfrak{H}_2$, *являющийся регулярной функцией от* z $(|z|<1)$ *и удовлетворяющий неравенству* (5)*, *то оператор* $F(z)$, *определенный формулой* (6), *есть регулярная функция, не превосходящая по норме единицы, причем имеют место равенства* (3) *и* (4).

Формулам (4) и (6) можно придать несколько другой вид:

$$G(z) = V_{12}^{-1}(F(z) - V_{11})\left(E - V_{11}^{*}E(z)\right)^{-1}V_{21}^{*}, \tag{4'}$$

$$F(z) = \left(V_{12}^{*}\right)^{-1}\left(G(z) - V_{22}^{*}\right)(E - V_{22}G(z))^{-1}V_{21}. \tag{6'}$$

Формулу (1) можно рассматривать как частный случай формулы (4′) для одномерного унитарного пространства.

Заметим, что если $\|V_{11}\|<1$, доказательство теоремы значительно упрощается; ее можно установить непосредственно после леммы 1.

3. Видоизменим несколько постановку задачи, а именно, будем считать, что заданы $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_1'$ и произвольный оператор $F(z)$ из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_1'$, являющийся регулярной функцией от z и не превосходящий по норме единицы. Вопрос состоит в том, можно ли подобрать пространства $\mathfrak{H}_2$ и $\mathfrak{H}_2'$, а также изометрический оператор V таким образом, чтобы оператор-функция $F(z)$ была представима в виде (6), где $G(z)$ — некоторая регулярная оператор-функция из $\mathfrak{H}_2'$ в $\mathfrak{H}_2$, для которой выполняется при любом z $(|z|<1)$ неравенство (5).

Лемма 4. *Пусть* $F(z)$ $(|z|<1)$ — *регулярная оператор-функция из* $\mathfrak{H}_1$ *в* $\mathfrak{H}_1'$, *не превосходящая по норме единицы.*

Тогда совокупность $\mathfrak{N}$ *всех элементов* $\varphi \in \mathfrak{H}_1$, *для которых* $\|F(0)\varphi\| = \|\varphi\|$, *образует подпространство*** *в* $\mathfrak{H}_1$; *часть оператор-функции* $F(z)$, *индуцированная ею на подпространстве* $\mathfrak{N}$, *есть постоянный изометрический оператор, в то время как для всякого ненулевого* $\varphi \in \mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{N}$ $\|F(z)\varphi\| < \|\varphi\|$ *и* $F(z)\varphi \in \mathfrak{H}_1' \ominus F(0)\mathfrak{N}$, *каково бы ни было* z.

Небезынтересно отметить, что, если в условиях леммы 4 $\|F(z_0)\| = 1$ при каком-либо z_0, то $\|F(z)\| = 1$ при всяком z.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{H}_1$ *и* $\mathfrak{H}_1'$ — *произвольные унитарные пространства. Если оператор* $F(z)$ *из* $\mathfrak{H}_1$ *в* $\mathfrak{H}_1'$ *является регулярной функцией от* z $(|z|<1)$ *и не превосходит по норме единицы, то его можно представить в виде* (6), *где* $G(z)$ — *некоторая регулярная оператор-функция из унитарного пространства* $\mathfrak{H}_2'$ *в* $\mathfrak{H}_2$, *удовлетворяющая условию* (5), *а* V_{ik} $(i, k = 1, 2)$ — *операторы, определяющие изометрический оператор* V, *который отображает* $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ *на* $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$ *и удовлетворяет условию: из* $V\varphi_2 \in \mathfrak{H}_2'$, $\varphi_2 \in \mathfrak{H}_2$, *следует* $\varphi_2 = 0$.

Обратно, если $F(z)$ *можно представить в виде* (6), *где* $G(z)$ *и* V — *операторы, обладающие перечисленными свойствами, то* $F(z)$

---

* Вместо (5) достаточно потребовать, чтобы оператор $G(z)$ не превосходил по норме единицы и чтобы $G(0) = 0$. Тогда (5) следует из леммы Шварца.

** В частном случае $\mathfrak{N}$ может быть нулевым подпространством.

есть регулярная оператор-функция из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_1'$, не превосходящая по норме единицы.

Для доказательства первой части теоремы строим изометрический оператор V, обладающий всеми указанными в теореме свойствами и связанный с заданной оператор-функцией $F(z)$ равенством $V_{11} = F(0)$, что легко сделать, как это показано М. А. Наймарком (([1]), теорема 10 и следствие 2). После этого достаточно, принимая во внимание лемму 4, воспользоваться теоремой 1. Вторая часть теоремы тоже устанавливается с помощью теоремы 1.

Замечание 1. Если задана оператор-функция $F(z)$, выбор пространств $\mathfrak{H}_2$ и $\mathfrak{H}_2'$ ограничен лишь следующими условиями:

$$\dim \mathfrak{H}_2 = \dim \overline{\mathfrak{R}\left(\sqrt{E - F(0)\, F^*(0)}\right)}, \quad \dim \mathfrak{H}_2' = \dim \overline{\mathfrak{R}\left(\sqrt{E - F^*(0)\, F(0)}\right)}.$$

Замечание 2. Несколько изменяя формулировку упомянутой выше теоремы М. А. Наймарка, убеждаемся в том, что операторы V_{ik}, определяющие оператор V, имеют вид $V_{11} = F(0)$, $V_{12} = \sqrt{E - F(0)F^*(0)}\, W_2$, $V_{21} = W_1 \sqrt{E - F^*(0)\, F(0)}$, $V_{22} = -W_1 F^*(0)\, W_2$, где W_1 и W_2 — изометрические операторы, отображающие, соответственно $\overline{\mathfrak{R}\left(\sqrt{E - F^*(0)\, F(0)}\right)}$ на $\mathfrak{H}_2'$ и $\mathfrak{H}_2$ на $\overline{\mathfrak{R}\left(\sqrt{E - F(0)\, F^*(0)}\right)}$.

Представление оператор-функции $F(z)$ в виде (6) может оказаться полезным для установления простых неравенств, которым удовлетворяют нормы $\| F(z) - F(0) \|$ и $\| dF(z)/dz \|$.

Так, например, вводя обозначения

$$k = \inf_{\|\varphi\|=1} \| F(0)\varphi \|, \quad k_1 = \inf_{\|\psi\|=1} \| F^*(0)\psi \|$$

и принимая во внимание замечание 2, получаем из (6)

$$\| F(z) - F(0) \| \leqslant |z| \frac{\sqrt{(1-k^2)(1-k_1^2)}}{1 - |z| \cdot \| F(0) \|},$$

а отсюда следует и оценка для нормы производной:

$$\left\| \frac{dF(0)}{dz} \right\| \leqslant \sqrt{(1-k^2)(1-k_1^2)}.$$

Ульяновский государственный педагогический учительский институт

Поступило 5 XI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, № 1 (1940).