Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 4

МАТЕМАТИКА

Я. Л. ШАПИРО

ВКЛЮЧАЕМЫЕ ПЕРЕНЕСЕНИЯ И ГЕОМЕТРИЯ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 9 XII 1949)

1. Тема настоящей работы тесно связана с понятием включаемой системы кривых [1].

Система кривых, получаемая интегрированием дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = f^i\left(x^j, \frac{dx^k}{dt}\right) \quad (i, j, k = 1, \ldots, n)$$

называется включаемой в пространство $n+m$ переменных x^i, x^a $(i = 1, \ldots, n;\ a = n+1, \ldots, n+m)$ аффинной (или линейной) связности, если уравнения системы могут быть дополнены другими так, чтобы вместе представить совокупность геодезических этого пространства.

Существуют 3 типа включаемых (или проективных) систем кривых.

1) Тип А. Дифференциальные уравнения системы имеют вид:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Pi^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0,$$

где Π^i_{jk} — произвольные функции координат x^l.

2) Тип В:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Pi^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = K^i + Z_{jlk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^l}{dt}\frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{dx^i}{dt}.$$

3) Тип С:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Pi^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = K^i + \Theta^i_j\frac{dx^j}{dt} + Z_{lk}\frac{dx^l}{dt}\frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{dx^i}{dt}. \qquad (*)$$

Π^i_{jk}, K^i_j, Θ^i_j и т. д. — произвольные функции координат x^l.

Параметр t с помощью включающего пространства определяется равенством вида:

$$P_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} = 1 \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n+m)$$

для типа В и

$$\varphi_\alpha\frac{dx^\alpha}{dt} = 1 \quad (\alpha = 1, \ldots, n+m)$$

для типа С.

II. Пусть в пространстве переменных x^α (условимся, что индексы греческого алфавита пробегают значения $1, \ldots, n+m$; индексы $a, b, \ldots, h$ пробегают значения $n+1, \ldots, n+m$; наконец, индексы от i и далее принимают значения $1, \ldots, n$) задано перенесение вектора λ^α вдоль кривой $x^\alpha = x^\alpha(t)$:

$$\frac{d\lambda^\alpha}{dt} + L^\alpha_{\beta\sigma}\frac{dx^\beta}{dt}\lambda^\sigma = 0.$$

Коэффициенты связности $L^\alpha_{\beta\sigma}$ вообще не симметричны относительно нижних индексов.

Если вектор λ^α удовлетворяет условию вида

$$\Phi(\lambda^\alpha, x^\beta) = 0, \tag{1}$$

причем $\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda^\alpha}\lambda^\alpha \neq 0$, то будем называть его нормированным (уравнением (1)).

Параллельный перенос нормированного вектора определяется уравнениями:

$$\frac{\partial\lambda^\alpha}{dt} + L^\alpha_{\beta\sigma}\frac{dx^\beta}{dt}\lambda^\sigma = A\lambda^\alpha, \tag{2}$$

где A очевидным образом определяется соотношением (1) (будем называть его нормирующим уравнением).

Рассмотрим еще перенесение вектора λ^i вдоль кривой $x^i = x^i(t)$ общего вида:

$$\frac{d\lambda^i}{dt} = f^i\left(x^i, \frac{dx^k}{dt}; \lambda^j\right) \quad (i, j, k = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

где f^i пока произвольны.

Перейдем теперь к формулировке основного понятия и основной задачи работы.

Перенесение вида (3) будем называть **включаемым в пространство линейной связности переменных** x^i, x^a, если уравнения (3) являются следствиями (1) и (2).

Геометрически это обозначает, что включаемое перенесение является проекцией параллельного переноса нормированного вектора λ^α на пространство переменных x^i $(i = 1, \ldots, n)$.

Основная задача работы заключается в нахождении включаемых перенесений, включающих их пространств и вида нормирующего уравнения.

Сделаем два важных, хотя и довольно очевидных примечания.

1. Пространства, включающие перенесение, принадлежат к классу пространств, включающих один из трех типов систем кривых в смысле, установленном выше.

При этом включенная система кривых оказывается системой «геодезических» для включенного перенесения.

2. Из одного включаемого перенесения можно получить всякое другое, включенное в то же пространство, полагая

$$\lambda^i = f(x^j, \overset{*}{\lambda}{}^k)\,\overset{*}{\lambda}{}^i.$$

Каждому такому перенесению соответствует свое нормирующее уравнение.

III. Результаты решения этой задачи для перенесений, «геодезическими» которых являются системы кривых типов А и С, заключаются в следующем.

Наиболее общим видом нормирующего уравнения является следующее:

$$\varphi_\alpha \lambda^\alpha = l(x^i, \lambda^j), \tag{4}$$

где l — произвольная функция, удовлетворяющая условию:

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda^i} \lambda^i \neq 1.$$

Если положить $l = 1$, то любое включаемое перенесение принимает вид:

$$\frac{d\lambda^i}{dt} + \Pi^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \lambda^k = \Theta^i_j \frac{dx^j}{dt} + Z_{kj} \frac{dx^k}{dt} \lambda^j \lambda^i, \tag{5}$$

где Π^i_{jk} и т. д. — произвольные функции координат x^l.

Коэффициенты связности включающего пространства и величины φ_α удовлетворяют следующим условиям:

$$L^i_{a\gamma} = \varphi_a \Theta^i_\gamma \quad (\Theta^i_a = 0), \qquad L^i_{\gamma a} = \psi_a \delta^i_\gamma,$$

$$L^i_{jk} = \Pi^i_{jk} + \varphi_j \Theta^i_k + \psi_k \delta^i_j$$

и, наконец,

$$\varphi_{\alpha,\,\beta} \lambda^\alpha \zeta^\beta = -\psi_\alpha \zeta^\alpha \cdot \psi_\beta \lambda^\beta + Z_{ij} \lambda^i \zeta^j,$$

где λ^α и ζ^β — произвольные величины, введение которых позволяет объединить несколько формул в одну.

Если положить $l = 1 - \varkappa_l \lambda^l$, где $\varkappa_i$ — произвольные функции координат, то в нормирующем уравнении $\varphi_\alpha \lambda^\alpha = 1$ произойдет замена φ_i на $\varphi_i + \varkappa_i$.

Вид перенесения не изменится, но величины Π^i_{jk} и т. д. заменятся другими:

$$\overset{*}{\Pi}{}^i_{jk} - \Pi^i_{jk} = \Delta\Pi^i_{jk} = \varkappa_j \Theta^i - \varkappa_l \Theta^l_k \delta^i_j, \qquad \Delta\Theta^i_k = 0,$$

$$\Delta Z_{ij} = \varkappa_i \varkappa_k \Theta^k_j - \left(\frac{\partial \varkappa_i}{\partial x^j} - \varkappa_k \Pi^k_{ij}\right).$$

Замена φ_i на $\varphi_i + \varkappa_i$ эквивалентна подстановке:

$$\overset{*}{\lambda}{}^i = \frac{\lambda^i}{1 + \varkappa_j \lambda^j}. \tag{6}$$

Таким образом, группа автоморфизмов перенесения (5) является проективной группой.

IV. Под включаемым перенесением мы будем понимать совокупность всех перенесений, включаемых в какое-либо L_{n+m}.

Рассматривая геометрию такого перенесения, мы можем ее определить как совокупность общих свойств класса включаемых перенесений (5), который мы инвариантно выделили, полагая нормирующее уравнение имеющим вид $\varphi_\alpha \lambda^\alpha = 1$.

Подробное исследование показывает, что включаемое перенесение (5) с группой автоморфизмов (6) является проективным перенесением наиболее общего вида, и его геометрия есть геометрия проективной связности.

Равенство $\Theta^i_j = \delta^i_j$ соответствует проективной геометрии Картана.

Выбирая $\varkappa_i$ в (6) так, чтобы $\Pi^i_{ik} = 0$, получаем перенесение, соответствующее его натуральному реперу.

Можно показать, что симметрия величин Π_i^{ik} и Z_{jk} относительно j и k (при $\Theta_j^i = \delta_j^i$) ведет к проективной системе Уайтхэда.

Примечание 1. Естественно ввести, по аналогии с геометрией системы путей (проективная система кривых типа А), геометрию системы траекторий типа С; это будет проективной геометрией, поскольку группа автоморфизмов уравнений ($*$) совпадает с проективной группой. Заметим, что геометрия траекторий типа С, вообще говоря, не совпадает с геометрией проективного перенесения.

Примечание 2. Из множества пространств, включающих данное (n-мерное) перенесение, можно выделить класс $n+1$-мерных пространств (переменных x^i, x^0), простейшим образом связанных с ним; известное по многим геометрическим и физическим теориям преобразовиние $\bar{x}^0 = x^0 + \rho(x^i)$ эквивалентно в нашей теории замене φ_i на $\varphi_i - \frac{\partial \rho}{\partial x^i}$ или подстановке:

$$\overset{*}{\lambda}{}^i = \frac{\lambda^i}{1 + \rho_i \lambda^i} \quad \left(\rho_i = \frac{\partial \rho_i}{\partial x^i}\right).$$

Горьковский государственный университет

Поступило 25 VII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Шапиро, Тр. семинара по тензорн. анализу, в. 6, 494 (1948).