Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXX, № 4

МАТЕМАТИКА

И. П. МЫСОВСКИХ

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА Л. В. КАНТОРОВИЧА РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 1 XII 1949)

Рассматривая функциональное уравнение

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

где $P(x)$ — дважды дифференцируемый в смысле Фреше оператор, преобразующий пространство X типа (B) в пространство Y того же типа. Для решения уравнения (1) Л. В. Канторович ([1,2]) разработал метод, согласно которому по элементу $x_0 \in X$ — „начальному приближению" — строится сходящаяся при некоторых условиях к решению уравнения (1) последовательность приближенных решений $\{x_k\}$ по формулам

$$x_{k+1} = x_k - [P'(x_k)]^{-1} P(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

едполагается, что для линейной операции $P'(x_k)$ — производной от оператора $P(x)$ в точке x_k — существует обратная).

Ниже приводятся некоторые теоремы, дополняющие эти результаты Л. В. Канторовича, а также даются применения метода к системам алгебраических уравнений и к интегральным уравнениям.

В дальнейшем используется обозначение:

$$H(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{h}{2}\right)^{2^k - 1}, \quad 0 \leqslant h < 2.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1) *начальное приближение x_0 приближенно удовлетворяет уравнению* (1) $\| P(x_0) \| \leqslant \eta$;

2) *для операции $P'(x)$ существует обратная $\Gamma_x = [P'(x)]^{-1}$ в каждой точке сферы*

$$\| x - x_0 \| \leqslant H(h) B_0 \eta, \tag{3}$$

причем для всех точек этой сферы $\| \Gamma_x \| \leqslant B$, а для нормы операции Γ_{x_0} известна более точная оценка $\| \Gamma_{x_0} \| \leqslant B_0 \leqslant B$;

3) *в сфере* (3) *выполнено неравенство*

$$\| P''(x) \| \leqslant K; \tag{4}$$

4) $h = BB_0 K \eta < 2$.

Тогда в сфере (3) *уравнение* (1) *имеет решение x^*, к которому сходятся последовательные приближения x_k, определяемые формулами* (2), *с быстротой сходимости, даваемой неравенством*

$$\| x_k - x^* \| \leqslant H(h) B_0 \eta \left(\frac{h}{2}\right)^{2^k - 1}.$$

Если условие 4) *выполнено в усиленной форме:* $h \leqslant \alpha$, *где* α — *корень уравнения* $hH(h) = 2$ ($\alpha \cong 1{,}13$), *то решение* x^* *единственно в сфере* $\|x - x_0\| < \frac{2}{h} B_0 \eta$. *При этом предполагается, что неравенство* (4) *выполнено также в этой сфере.*

Теорема 1 для случая, когда $P(x)$ есть вещественная функция одной переменной, была установлена А. Островским ([3]). В теореме А. Островского вместо условия 4) требуется выполнение условия $B^2 K \eta < 2$. Единственность решения для вещественного уравнения очевидным образом следует из условий теоремы.

Теорема 2. *Пусть в сфере*

$$\|x - x_0\| \leqslant r \tag{5}$$

уравнение (1) *имеет решение* x^*. *Если в каждой точке сферы*

$$\|x - x_0\| \leqslant \left(1 + \frac{l}{2}\right) r \tag{6}$$

существует обратная операция $\Gamma_x = [P'(x)]^{-1}$ *и выполнены неравенства:* $\|\Gamma_x\| \leqslant B$, $\|P''(x)\| \leqslant K$, *причем* $l = BKr < 2$, *то решение* x^* *единственно в сфере* (5) *и к нему сходятся последовательные приближения* x_k. *Быстрота сходимости дается неравенством*

$$\|x_k - x^*\| \leqslant q^{2^k - 1} \|x_0 - x^*\|, \quad q = \frac{l}{2} < 1.$$

Теорема 3. *Если уравнение* (1) *имеет решение* x^* *в сфере* (5) *и если выполнены условия*:

1) *существует оператор* $\Gamma_{x_0} = [P'_{(x_0)}]^{-1}$ и $\|\Gamma_{x_0}\| \leqslant B_0$;
2) $\|P''(x)\| \leqslant K$ *для всех* x *из сферы* (6);
3) $l = B_0 K r < {}^2/_3$,

то решение x^* *единственно в сфере* (5) *и к нему сходятся последовательные приближения, при этом быстрота сходимости дается неравенством*:

$$\|x_k - x^*\| \leqslant q^{2^{k-1} - 1} \|x_1 - x^*\|, \quad q = \frac{l^2}{4 - 4l - 2l^2} < 1.$$

Следующая теорема дает условия для сходимости модифицированного метода Л. В. Канторовича. Модификация метода состоит в том, что последовательные приближения x_k находятся по формулам

$$x_{k+1} = x_k - [P'(x_0)]^{-1} P(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Теорема 4. *Если в теореме* 3 *условие* 3) *заменить на условие* 3') $l = B_0 K r < 2(\sqrt{2} - 1)$,
то решение x^* *единственно в сфере* (5) *и к нему сходятся последовательные приближения, определяемые формулами* (7). *Быстрота сходимости дается неравенством*

$$\|x_k - x^*\| \leqslant q^{k-1} \|x_1 - x^*\|, \quad 0 \leqslant q < 1.$$

Приведем доказательство теоремы 4. Из соотношения

$$x^* - x_1 = [P'(x_0)]^{-1} [P(x_0) - P(x^*) - P'(x_0)(x_0 - x^*)],$$

которое является следствием (7) и равенства $P(x^*) = 0$, по аналогу формулы Тейлора (([2]), стр. 167) получим

$$\|x^* - x_1\| \leqslant B_0 \frac{1}{2} K \|x_0 - x^*\|^2 \leqslant \frac{l}{2} r.$$

Из этого неравенства и условия теоремы $\| x_0 - x^* \| \leqslant r$ следует, что x_1 входит в сферу (6).

Справедливо тождество

$$x^* - x_{k+1} = [P'(x_0)]^{-1} [P(x_k) - P(x^*) - P'(x^*)(x_k - x^*) + \\ + (P'(x^*) - P'(x_0))(x_k - x^*)]. \tag{8}$$

Из тождества (8) при $k=1$, пользуясь аналогами формулы Тейлора и формулы конечных приращений, получим

$$\| x^* - x_2 \| \leqslant B_0 \left(\frac{1}{2} K \| x_1 - x^* \|^2 + K \| x^* - x_0 \| \cdot \| x_1 - x^* \| \right) \leqslant \\ \leqslant B_0 K \left(\frac{B_0 K r^2}{4} + r \right) \cdot \| x_1 - x^* \| = q \| x_1 - x^* \|,$$

где $q = l + \frac{l^2}{4} < 1$. При применении аналога формулы Тейлора использовалось то обстоятельство, что x_1 входит в сферу (6).

Так как x_2, очевидно, входит в сферу (6), то, как и выше, найдем $\| x^* - x_3 \| \leqslant q^2 \| x_1 - x^* \|$ и, вообще, для любого k

$$\| x^* - x_k \| \leqslant q^{k-1} \| x^* - x_1 \|.$$

Отсюда следует, что $\lim x_k = x^*$. Единственность решения x^* в сфере (5) следует из единственности $\lim x_k$.

1. Системы алгебраических уравнений. Если за $X = Y$ взять n-мерное пространство m_n с нормой $\| x \| = \max (|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|)$, то получим ряд теорем о сходимости метода Ньютона для системы алгебраических уравнений

$$f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

В частности, получаются в усиленном виде результаты К. Буземана ([4]). В качестве примера приведем следующую теорему, доказательство которой получается на основании теоремы 1.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия*:

1) $\| x_0 - x_1 \| \leqslant \eta$;

2) *в сфере*

$$\| x - x_0 \| \leqslant H(1) \eta \tag{10}$$

матрица $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial \xi_k} \right\|$ *имеет определитель* $\Delta(A(x)) \neq 0$ *и для всех точек этой сферы выполнено неравенство* $|A_{ik}(x)| \leqslant v$, *где* $A_{ik}(x)$ — *алгебраические дополнения элементов* $\Delta(A(x))$;

3) *неравенство* $\left| \frac{\partial^2 f_i}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \right| \leqslant L$ *выполнено для всех точек сферы*

$$\| x - x_0 \| < 2\eta; \tag{11}$$

4) $\frac{1}{\min |\Delta(A(x))|} n^3 v L \eta \leqslant 1$, *здесь* $\min$ *берется по всем* x *из сферы* (10).

Тогда в сфере (10) *система* (9) *имеет решение* x^*, *единственное в сфере* (11), *и к нему сходятся последовательные приближения*.

2. Интегральные уравнения. Рассматривается уравнение

$$x(s) = \int_0^1 K(s, t) f(t, x(t)) \, dt. \tag{12}$$

Если взять в качестве $X=Y$ пространство C непрерывных функций, заданных на $[0, 1]$, то получим следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия:*

1) *ядро* $K(s, t) f'_x(t, x_0(t))$, *где* $x_0(t) \in C$, *имеет резольвенту* $G(s, t)$, *причем* $\max \int\limits_0^1 |G(s, t)|\, dt \leqslant B$;

2) $\max \left| x_0(s) - \int\limits_0^1 K(s, t) f(t, x_0(t))\, dt \right| \leqslant \eta$;

3) $K(s, t)$ *измерима в* $[0,1; 0,1]$, *непрерывна по* s *и удовлетворяет неравенству* $K^2(s, t) \leqslant K_1(t)$, *где* $K_1(t)$ *суммируема на* $[0, 1]$;

4) *в плоской области* G, *содержащей множество точек* (t, x), *удовлетворяющих неравенствам* $0 \leqslant t \leqslant 1$, $|x - x_0(t)| \leqslant 2(B+1)\eta$, $f(t, x)$ *измерима и имеет* f''_{x^2}, *удовлетворяющую в* G *условию* $[f''_{x^2}]^2 \leqslant D(t)$, *где* $D(t)$ *суммируема на* $[0, 1]$;

5) *функции* $f(t, x_0(t))$ *и* $f'_x(t, x_0(t))$ *суммируемы с квадратом*;

6) $(B+1)^2 K\eta \leqslant \frac{1}{2}$, *здесь* $K = \left\{ \int\limits_0^1 K_1(t)\, dt \cdot \int\limits_0^1 D(t)\, dt \right\}^{1/2}$.

Тогда уравнение (12) *имеет единственное решение* $x^*(s)$ *в сфере* $\| x - x_0 \| \leqslant 2(B+1)\eta$, *к которому сходятся последовательные приближения.*

Как следствие теоремы 6 получается усиление теоремы В. В. Немыцкого ((5), стр. 450) в том отношении, что теорема 6, помимо существования решения, дает единственность, а также указывает способ для практического нахождения решения.

Поступило
25 XI 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, ДАН, 59, № 7 (1948). [2] Л. В. Канторович, Усп. матем. наук, в. 6, 89 (1948). [3] А. Островский, Матем. сборн., 3 (45), 253 (1938). [4] P. Rehbock, Zs. angew. Math. u. Mech., 22, H. 6, 361 (1942). [5] В. В. Немыцкий, Матем. сборн., 41 : 3, 421 (1934).