Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Х. ШАТАШВИЛИ

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ ПРИ ЗАДАННЫХ СМЕЩЕНИЯХ НА ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО ТЕЛА

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 17 I 1950)

В настоящей статье рассматривается задача об установившихся колебаниях упругого тела, когда на поверхности заданы компоненты вектора смещения. Д. И. Шерманом и позже И. Н. Векуа дано полное решение плоской задачи при заданных на границе смещениях ([1],[2]). Пространственная динамическая задача теории упругости с заданными смещениями на границе также полностью изучена В. Д. Купрадзе ([3]). Пользуясь способом, предложенным Д. И. Шерманом ([1]) (отличным от метода, содержащегося в ([3])), мы строим в настоящей статье некоторые частные решения, с помощью которых граничная задача теории упругости при заданных на поверхности смещениях приводится к системе интегральных уравнений Фредгольма; нами также устанавливается разрешимость полученной системы.

1. Пусть дано некоторое конечное упругое тело, ограниченное поверхностью S, удовлетворяющей условию Ляпунова. Через $\Phi(x, y, z)$ и $\vec{\Psi}(x, y, z)$ обозначим, соответственно, продольный и поперечный потенциалы упругого тела. Как известно, они удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{gathered}\Delta\Phi + k_1^2\Phi = 0,\\ \Delta\vec{\Psi} + k_2^2\vec{\Psi} = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа; $k_1^2 = \lambda^2/a^2$, $k_2^2 = \lambda^2/b^2$; λ — частота колебания; a и b — так называемые скорости продольных и поперечных волн.

Требуется определить решение уравнения (1) в области, ограниченной поверхностью S и удовлетворяющей на S следующим условиям:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_y}{\partial z} = f_1(\xi_0, \eta_0, \zeta_0),\\ &\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial\Psi_z}{\partial x} = f_2(\xi_0, \eta_0, \zeta_0),\\ &\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial\Psi_x}{\partial y} = f_3(\xi_0, \eta_0, \zeta_0),\end{aligned} \tag{2}$$

где $f_j(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ $(j = 1, 2, 3)$ — заданные на поверхности непрерывные функции, удовлетворяющие условию Гельдера.

2. Введем следующие обозначения:

$$H_1 = -A \frac{d}{dn} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} + B\alpha f^{(1)}(R),$$

$$H_2 = -A \frac{d}{dn} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y} + B\beta f^{(1)}(R),$$

$$H_3 = -A \frac{d}{dn} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial z} + B\gamma f^{(1)}(R),$$

$$P_1 = A\left(-\gamma \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right),$$

$$P_2 = A\left(-\gamma \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) + \gamma f^{(2)}(R),$$

$$P_3 = A\left(-\gamma \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + \beta \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) - \beta f^{(2)}(R),$$

$$Q_1 = A\left(-\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) - \gamma f^{(2)}(R), \tag{3}$$

$$Q_2 = A\left(-\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right),$$

$$Q_3 = A\left(-\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \gamma \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right) + \alpha f^{(2)}(R),$$

$$R_1 = A\left(-\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + \beta f^{(2)}(R),$$

$$R_2 = A\left(-\beta \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \alpha f^{(2)}(R),$$

$$R_3 = A\left(-\beta \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} + \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right),$$

где n — внутренняя нормаль к поверхности S в точке $Q(\xi, \eta, \zeta)$ и

$$A = \frac{2}{k_1^2 + k_2^2}, \quad B = -\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2 + k_2^2},$$

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad f^{(j)}(R) = \frac{e^{-ik_jR}}{R} \quad (j = 1, 2), \tag{4}$$

$$\alpha = \cos(\widehat{n, x}), \quad \beta = \cos(\widehat{n, y}), \quad \gamma = \cos(\widehat{n, z}).$$

Легко видеть, что функции (3) удовлетворяют уравнениям (1). Они образуют требуемую систему элементарных решений.

Потенциалы $\Phi(x, y, z)$ и $\vec{\Psi}(x, y, z)$ будем искать в следующем виде:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(S)} (H_1\mu_1 + H_2\mu_2 + H_3\mu_3)\, ds,$$

$$\Psi_x(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(S)} (P_1\mu_1 + P_2\mu_2 + P_3\mu_3)\, ds,$$

$$\Psi_y(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(S)} (Q_1\mu_1 + Q_2\mu_2 + Q_3\mu_3)\, ds, \tag{5}$$

$$\Psi_z(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(S)} (R_1\mu_1 + R_2\mu_2 + R_3\mu_3)\, ds,$$

где Ψ_x, Ψ_y, Ψ_z — составляющие векторного потенциала и $\mu_j(\xi, \eta, \zeta)$ $(j=1, 2, 3)$ — неизвестные функции, подлежащие определению.

Очевидно, что выражения (5) являются решениями соответствующих уравнений (1). Подставив их в граничные условия (2) и пользуясь формулами (точка $M(x, y, z)$ стремится к $M_0(\xi, \eta, \zeta)$ изнутри S)

$$\lim_{M\to M_0}\iint\limits_{(S)}\mu\frac{d}{dn}\frac{1}{R}\,ds = 2\pi\mu(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) + \iint\limits_{(S)}\mu\left(\frac{d}{dn}\frac{1}{R}\right)_0 ds,$$

$$\lim_{M\to M_0}\iint\limits_{(S)}\mu\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2\frac{d}{dn}\frac{1}{R}\,ds = \frac{2}{3}\mu(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) + \iint\limits_{(S)}\mu\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)_0^2\left(\frac{d}{dn}\frac{1}{R}\right)_0 ds,$$

$$\lim_{M\to M_0}\iint\limits_{(S)}\mu\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial y}\frac{d}{dn}\frac{1}{R}\,ds = \iint\limits_{(S)}\mu\left(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial y}\right)_0\left(\frac{d}{dn}\frac{1}{R}\right)_0 ds$$

и им аналогичными, нетрудно убедиться, что нахождение функций $\mu_j(Q) = \mu_j(\xi, \eta, \zeta)$ $(j=1, 2, 3)$ приводится к решению следующей системы интегральных уравнений Фредгольма:

$$\begin{gathered}
\mu_1(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) + \iint\limits_{(S)}\{K_1^{(1)}(M_0, Q)\mu_1(Q) + K_2^{(1)}(M_0, Q)\mu_2(Q) + \\
+ K_3^{(1)}(M_0, Q)\mu_3(Q)\}\,ds = f_1(\xi_0, \eta_0, \zeta_0), \\
\mu_2(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) + \iint\limits_{(S)}\{K_1^{(2)}(M_0, Q)\mu_1(Q) + K_2^{(2)}(M_0, Q)\mu_2(Q) + \\
+ K_3^{(2)}(M_0, Q)\mu_3(Q)\}\,ds = f_2(\xi_0, \eta_0, \zeta_0), \qquad (6) \\
\mu_3(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) + \iint\limits_{(S)}\{K_1^{(3)}(M_0, Q)\mu_1(Q) + K_2^{(3)}(M_0, Q)\mu_2(Q) + \\
+ K_3^{(3)}(M_0, Q)\mu_3(Q)\}\,ds = f_3(\xi_0, \eta_0, \zeta_0),
\end{gathered}$$

где

$$K_j^{(1)}(M_0, Q) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial H_j}{\partial x} + \frac{\partial R_j}{\partial y} - \frac{\partial Q_j}{\partial z}\right),$$

$$K_j^{(2)}(M_0, Q) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial H_j}{\partial y} + \frac{\partial P_j}{\partial z} - \frac{\partial R_j}{\partial x}\right),$$

$$K_j^{(3)}(M_0, Q) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial H_j}{\partial z} + \frac{\partial Q_j}{\partial x} - \frac{\partial P_j}{\partial y}\right) \quad (j=1, 2, 3).$$

3. Можно показать, что резольвента системы (6) является мероморфной функцией параметра λ, имеющей конечное значение при $\lambda = 0$. Действительно, в этом случае система уравнений (6) обращается в систему для статической задачи; как хорошо известно, система разрешима при любой правой части (см., например, [4]). Отсюда, согласно теореме Тамаркина [5], заключаем, что система (6) разрешима почти для всех значений λ.

Примечание. Нетрудно видеть, что функции (3) на бесконечности удовлетворяют так называемому принципу излучения. Рассуждая аналогично предыдущему, с помощью тех же выражений (5) сведем задачу для области, внешней к S, к системе Фредгольма.

Последняя будет отличаться от (6) лишь знаком при неизвестных во внеинтегральных членах.

Грузинский политехнический институт
им. С. М. Кирова

Поступило
9 XII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. И. Шерман, Прикладн. матем. и мех., 10 (1946). [2] И. Н. Векуа. Новые методы решения эллиптических уравнений, 1948. [3] В. Д. Купрадзе. ДАН, 67, № 2 (1949). [4] Д. И. Шерман, Прикладн. матем. и мех., 7 (1943). [5] T. Tamarkin, Ann. of Math., 2d ser., 28, No. 2 (1927).