Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 2

ГИДРОМЕХАНИКА

Н. М. МАРКОВ

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ И ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ТУРБИННЫХ РЕШЕТКАХ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 13 I 1950)

В настоящее время профилирование лопаток турбинных решеток производится, исходя из гипотезы цилиндрических сечений для потока в этих решетках. Для обеспечения движения жидкости по соосным поверхностям входные и выходные углы лопаток по их размаху (высоте) находятся из условия радиального равновесия потока в зазоре между неподвижной и вращающейся решетками и на выходе из последней. Решение строится при условии, что поток движется в пределах рассматриваемой решетки без потерь энергии. Этому условию удовлетворяет движение основной части жидкости, движущейся вне пограничного слоя [1]. Качественная оценка показала [2], что жидкость, движущаяся вблизи поверхности лопатки, т. е. в так называемом пограничном слое, в радиальном направлении не уравновешена и отклоняется или к периферии, или, что особенно интересно, к корню лопаток. Гипотеза цилиндрических сечений из-за трехмерного потока в пограничном слое нарушается по всему размаху лопаток.

В настоящей заметке получено уравнение для крутки профиля скорости в трехмерном пограничном слое на лопатках. Это уравнение необходимо как для анализа факторов, влияющих на радиальные токи, так и при расчете трехмерного пограничного слоя. Анализ полученного уравнения подтверждает возможность отклонения жидкости не только к периферии, но и к корню лопаток.

В дальнейшем будем предполагать, что углы лопаток выбраны таким образом, что потенциальная часть потока движется по соосным поверхностям.

Применим принцип Даламбера к элементарному объему жидкости с размерами Δx, Δy, Δz, выделенному внутри пограничного слоя на вращающейся лопатке. При этом ось x подвижной системы координат принимаем совпадающей с контуром лопатки, ось y — с внешней нормалью к ее поверхности и ось z — с образующей лопатки.

Проекция сил на ось x с точностью до малых второго порядка дает

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\Delta y + \tau \sin\varphi\,\Delta\varphi - \frac{d\tau}{dy}\cos\varphi\,\Delta y + C_x\Delta y = 0, \tag{1}$$

где p — давление; τ — напряжение трения в какой-либо точке (по толщине) пограничного слоя; φ — угол между направлением скорости в той же точке пограничного слоя и направлением скорости на внешней границе слоя; C_x—составляющая по оси x поворотной силы отнесенной к единице объема жидкости.

Проекция сил на ось z с точностью до величин второго порядка малости дает

$$\frac{\partial p}{\partial z}\Delta y + \tau\cos\varphi\,\Delta\varphi + \frac{\partial\tau}{\partial y}\sin\varphi\,\Delta y - R_z\Delta y - C_z\Delta y = 0; \qquad (2)$$

$$R_z = R_{1z} + R_{2z},$$

где R_{1z}—сила инерции переносного движения; R_{2z} — составляющая по оси z силы инерции, обусловленная кривизной относительного движения; C_z — составляющая по z поворотной силы.

Умножим (1) на $\sin\varphi$, а (2) на $\cos\varphi$ и сложим полученные уравнения; будем иметь

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\sin\varphi - \frac{\partial p}{\partial z}\cos\varphi + R_z\cos\varphi + C_z\cos\varphi - C_x\sin\varphi\right). \qquad (3)$$

Сила инерции R_{1z} представляет собой центробежную силу и равна

$$R_{1z} = \frac{\rho u_{окр}^2}{r}, \qquad (4)$$

где ρ— плотность; $u_{окр}$—окружная скорость (скорость переносного движения); r—радиус вращения частицы жидкости (в переносном движении) относительно оси решетки.

Сила инерции R_{2z} будет

$$R_{2z} = \frac{\rho v^2}{r_1}\cos\varphi, \qquad (5)$$

где r_1—радиус кривизны линии тока в относительном движении; v—скорость в пограничном слое, принимаемая подчиняющейся степенному закону

$$\frac{v}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^n. \qquad (6)$$

Здесь δ — толщина пограничного слоя, U — скорость на внешней границе слоя.

Составляющие поворотной силы будут

$$C_z = \frac{2\rho u_{окр} v}{r}\sqrt{1-\cos^2\varphi\sin^2\psi}\,\frac{\cos\psi}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi+\cos^2\psi}} = \frac{2\rho u_{окр} v}{r}\cos\psi\cos\varphi, \qquad (7)$$

$$C_x = -\frac{2\rho u_{окр} v}{r}\cos\psi\sin\varphi, \qquad (8)$$

где ψ — угол между положительным направлением скорости вращения и направлением скорости на внешней границе слоя.

Выражением (5) воспользоваться весьма сложно, а поэтому используем для R_{2z} приближенную зависимость. Легко представить, что R_{2z} от некоторой величины на внешней границе слоя $\rho U^2\cos^2\psi / r$ уменьшается и у поверхности лопатки равна нулю. Принимая во внимание следующие граничные условия:

$$1)\ \text{при}\ y=\delta \quad R_{1z} + R_{2z} + C_z = \frac{\partial p}{\partial z};$$

$$2)\ \text{при}\ y=\delta \quad \frac{\partial R_{2z}}{\partial y} = 0; \qquad (9)$$

$$3)\ \text{при}\ y=0 \quad R_{2z} = 0,$$

закон изменения R_{2z} по толщине слоя принимаем в виде

$$R_{2z} = \frac{\rho U^2 \cos^2 \psi}{r} \eta^{n_1}, \tag{10}$$

где $\eta = y/\delta$ — безразмерное расстояние по нормали к поверхности лопатки. Для внешней границы пограничного слоя выражения (5), (7) и (8) напишутся в виде

$$R_{2z} = \frac{\rho U^2 \cos^2 \psi}{r};$$

$$C_x = 0;$$

$$C_z = \frac{2\rho u_{окр} U}{r} \cos \psi;$$

тогда

$$\frac{\partial p}{\partial z} = R_{1z} + R_{2z} + C_z = \frac{\rho}{r} (u_{окр}^2 + U^2 \cos^2 \psi + 2u_{окр} U \cos \psi),$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\rho}{r} (u_{окр} + U \cos \psi)^2. \tag{11}$$

Значение показателя степени n_1 определяем, применяя граничное условие (11) к точкам, лежащим внутри слоя на бесконечно малом расстоянии ε от внешней его границы, т. е. для $\eta = 1 - \varepsilon$. Для этих точек, в соответствии с (4), (6), (7) и (10), будем иметь

$$R_{1z} + R_{2z} + C_z = \frac{\rho}{r} (u_{окр}^2 + U^2 \eta^{n_1} \cos^2 \psi + 2u_{окр} U \eta^n \cos \psi \cos \varphi). \tag{12}$$

При $\eta \to 1$ $(\varphi \to 0)$ выражение (12) должно перейти в (11). Это возможно только при $n_1 = 2n$.

Напряжение трения в слое представим в следующем виде:

$$\tau = \tau_0 (1 - \eta). \tag{13}$$

Входящее в (13) напряжение трения на стенке τ_0 находим, используя формулу Прандтля

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{dv}{dy} \right)^2, \tag{14}$$

для чего принимаем, что изменение пути перемешивания l подчиняется закону

$$\frac{l}{\delta} = 0{,}14 - 0{,}08 (1 - \eta)^2 - 0{,}06 (1 - \eta)^4. \tag{15}$$

Будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \rho U^2 \xi_0 (1 - \eta); \\ \xi_0 &= n^2 \eta^{2(n-1)} [0{,}14 - 0{,}08 (1 - \eta)^2 - 0{,}06 (1 - \eta)^4]^2, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где ξ_0 подсчитывается при $\eta \to 0$.

Принимая во внимание (4), (7), (8), (10) и (16), дифференциальное уравнение (3) может быть приведено к виду:

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{A}{1 - \eta} \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{[(\eta^{n_1} - 1) \overline{U} \cos \psi - 2] \overline{U} \cos \psi \cos \varphi + 2\eta^n \overline{U} \cos \psi}{(1 + \overline{U} \cos \psi)^2} \right\}, \tag{17}$$

где $A = \delta / \rho U^2 \xi_0$. Это уравнение является уравнением крутки профиля скорости в пограничном слое на лопатке.

Исследуем полученное уравнение в области $\eta \to 1$. Здесь φ мало. Можно положить, что $\sin\varphi = \varphi$ и $\cos\varphi = 1$; тогда

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = A\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\varphi}{1-\eta} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{A\overline{U}\cos\psi\left[(\eta^{2n}-1)\overline{U}\cos\psi + 2\eta^n - 2\right]}{(1-\eta)(1+\overline{U}\cos\psi)^2}. \tag{18}$$

Раскрывая неопределенность коэффициента при $\partial p / \partial z$, получим

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = A\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\varphi}{1-\eta} - \frac{2An\overline{U}\cos\psi}{1+\overline{U}\cos\psi}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{19}$$

Решая это уравнение, будем иметь

$$\varphi = \frac{2An\overline{U}\cos\psi\,\dfrac{\partial p}{\partial z}}{\left(1 + A\dfrac{\partial p}{\partial x}\right)(1+\overline{U}\cos\psi)}(1-\eta). \tag{20}$$

Величины $A\,\partial p / \partial x \ll 1$ и $\overline{U}\cos\psi < 1$; таким образом, знаменатель всегда положителен. Для рассматриваемых решеток $\partial p / \partial z < 0$. Тогда при $\psi < 0$ для вращающихся лопаток $\varphi < 0$, т. е. жидкость отклоняется к корню лопаток, и при $\psi > 0$ $\varphi > 0$, т. е. жидкость отклоняется к периферии. Это явление может существенно изменить обтекание лопаток и, прежде всего, в их периферийных и корневых сечениях. Сносимый на выходных кромках вращающихся лопаток пограничный слой к периферии набухает значительно интенсивнее, чем если бы лопатки были неподвижными. Это может привести к отрыву потока от поверхности лопатки. Легко убедиться, что в направляющей решетке поток в пограничном слое отклоняется к корню лопаток.

Поступило
16 VII 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. М. Марков, Судостроение, № 4 (1947). [2] Н. М. Марков, Котлотурбостроение, № 3 (1949).