Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 2

МАТЕМАТИКА

А. В. ШТРАУС

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЕЗОЛЬВЕНТАХ СИММЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 I 1950)

1. Настоящая работа примыкает к исследованиям М. А. Наймарка ([3-5]) о спектральных функциях симметрического оператора. Следуя терминологии, принятой в указанных работах, мы называем линейный оператор A, действующий в унитарном пространстве $\mathfrak{H}$*, эрмитовым, если $(Af, g) = (f, Ag)$ для любых $f, g \in \mathfrak{D}(A)$; симметрическим мы называем такой эрмитов оператор A, область определения $\mathfrak{D}(A)$ которого плотна в $\mathfrak{H}$. Все рассматриваемые нами операторы предполагаются замкнутыми. Как известно, важную роль в теории симметрических операторов играет понятие спектральной функции**.

М. А. Наймарку принадлежит фундаментальная теорема ([4]), согласно которой действующая в $\mathfrak{H}$ оператор-функция $E(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ является спектральной функцией симметрического оператора A в $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, если она допускает представление

$$E(t)f = P\tilde{E}(t)f \quad (f \in \mathfrak{H}), \tag{1}$$

где $\tilde{E}(t)$ — спектральная функция какого-либо самосопряженного расширения $\tilde{A}$ оператора A в некотором объемлющем пространстве $\tilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$, а P — оператор ортогонального проектирования в $\tilde{\mathfrak{H}}$ на $\mathfrak{H}$. Об операторе $\tilde{A}$ будем говорить, что он определяет соответствующую спектральную функцию $E(t)$ оператора A.

Каждой спектральной функции $E(t)$ оператора A соответствует обобщенная резольвента R_λ, определенная при любом невещественном λ формулой:

$$R_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE(t)}{t-\lambda}. \tag{2}$$

По заданной обобщенной резольвенте R_λ соответствующая спектральная функция $E(t)$ однозначно восстанавливается с помощью известной формулы обращения. Сопоставляя (1) и (2), М. А. Наймарк получает в ([5]) для обобщенной резольвенты следующее выражение:

$$R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}(E - P_{\bar{\lambda}}) - \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} P_{\bar{\lambda}} + \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} P W_\lambda P_{\bar{\lambda}}, \tag{3}$$

* $\mathfrak{H}$ может быть и несчетномерным.

** По поводу определения спектральной функции см. ([1]) или ([4]).

где P_λ — оператор ортогонального проектирования в $\mathfrak{H}$ на дефектное подпространство $\mathfrak{M}_\lambda$ оператора A, а W_λ — унитарный оператор в $\mathfrak{H}$, определенный формулой:

$$W_\lambda = (\widetilde{A} - \bar{\lambda}E)(\widetilde{A} - \lambda E)^{-1} \quad (\operatorname{Im} \lambda \neq 0). \tag{4}$$

Формулой (3) задаются все обобщенные резольвенты оператора A; она может служить, таким образом, наряду с формулой (1), для описания всех спектральных функций оператора A. Однако неудобство обеих этих формул состоит в том, что в них вводится в рассмотрение множество всевозможных самосопряженных расширений $\widetilde{A}$ оператора A в некотором объемлющем пространстве $\widetilde{\mathfrak{H}}$, в то время как имеются классы различных самосопряженных расширений, определяющих одну и ту же спектральную функцию. Поэтому естественно возникает задача построения для спектральных функций или для обобщенных резольвент более удобной общей формулы, в которую вместо произвольного самосопряженного расширения $\widetilde{A}$ оператора A вошел бы более экономный элемент произвола. При этом достаточно получить формулу обобщенных резольвент R_λ для невещественного параметра λ, изменяющегося в одной полуплоскости (верхней или нижней), так как для значения λ в другой полуплоскости R_λ определится из соотношения: $R_\lambda = R^*_{\bar{\lambda}}$. Для случая симметрического оператора с индексами дефекта (1, 1) такие формулы были найдены различными путями М. А. Наймарком ([5]) и М. Г. Крейном ([1]). Позже М. Г. Крейн получил аналогичную формулу для операторов с равными конечными индексами дефекта ([2]). Наконец, автор рассмотрел в ([6]) случай любых конечных индексов дефекта. В настоящей работе мы устанавливаем формулу обобщенных резольвент симметрического оператора с любыми индексами дефекта. Кроме того, мы показываем, что поставленная задача решена до конца и в том смысле, что при различном выборе входящей в эту формулу произвольной оператор-функции $F(\lambda)$ получаются различные обобщенные резольвенты. Так же как и в ([6]), мы используем здесь результаты М. А. Наймарка, в частности и формулу (3). Поскольку в правой части этой формулы лишь оператор $PW_\lambda P_{\bar{\lambda}}$ зависит от выбора самосопряженного расширения $\widetilde{A}$ оператора A, весь вопрос сводится к изучению оператора $PW_\lambda P_{\bar{\lambda}}$ как функции невещественного параметра λ. Отметим, что прием, с помощью которого мы находим для этого оператора соответствующее общее выражение, отличается от предложенного в ([5]) метода М. А. Наймарка. Существенную роль в нашем методе играет понятие параллельного проектора, введенное в ([7]), а также установленная в ([8]) теорема о регулярных оператор-функциях, не превосходящих по норме единицы.

2. Пусть A — произвольный симметрический оператор в $\mathfrak{H}$ с индексами дефекта $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$, ни один из которых не равен нулю*. При построении самосопряженного расширения $\widetilde{A}$ оператора A воспользуемся приемом М. А. Наймарка. Рассмотрим произвольный эрмитов оператор A_1 в $\mathfrak{H}_1$, индексы дефекта $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1)$ которого удовлетворяют соотношениям $\mathfrak{m} + \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{n} + \mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{m}_1 \leqslant \mathfrak{n}$. Оператор $A_0 = A \oplus A_1$ в $\mathfrak{H} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}_1$ есть эрмитов оператор с равными индексами дефекта. Обозначая через $\mathfrak{M}^i_\lambda$ при любом невещественном λ дефектное подпространство оператора A_i $(i = 0, 1)$, имеем $\mathfrak{M}^0_\lambda = \mathfrak{M}_\lambda \oplus \mathfrak{M}^1_\lambda$. Пусть λ_0 — какое-либо фиксированное невещественное число. Рассмотрим произвольный изометрический оператор V, отображающий $\overset{0}{\mathfrak{M}}_{\bar{\lambda}}$ на $\mathfrak{M}^0_{\lambda_0}$ и удовлетворяю-

---

* Если хотя бы одно из чисел $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, равно нулю, то оператор $PW_\lambda P_{\bar{\lambda}}$ в формуле (3) аннулируется.

щий условию: из $V\varphi \in \mathfrak{M}'_{\lambda_0}$, $\varphi \in \mathfrak{M}^1_{\bar\lambda_0}$, следует $\varphi = 0$. Тогда оператор $\widetilde{A}$, определенный формулой $\widetilde{A}(f + V\varphi - \varphi) = A_0 f + \lambda_0 V\varphi - \bar\lambda_0 \varphi$ ($f \in \mathfrak{D}(A_0)$, $\varphi \in \mathfrak{M}^0_{\bar\lambda_0}$), и является самосопряженным расширением в $\mathfrak{H}$ оператора A. Всякое самосопряженное расширение $\widetilde{A}$ оператора A может быть получено этим путем, если соответствующим образом подобрать A_1 и V. Следуя М. А. Наймарку, будем говорить, что операторы A_1 и V определяют самосопряженное расширение $\widetilde{A}$.

Пусть A_1 и V — такие операторы. Рассмотрим параллельный проектор $K_1(\lambda;\ \lambda_0)$ из $\mathfrak{M}^1_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{M}^1_{\bar\lambda}$ оператора A_1, где невещественный параметр λ пробегает ту полуплоскость Π, которая содержит точку λ_0 [7]. Итак, для любых $\lambda \in \Pi$ и $\varphi \in \mathfrak{M}^1_{\lambda_0}$ имеем: $\varphi - K_1(\lambda;\ \lambda_0)\,\varphi \in \mathfrak{R}(A_1 - \lambda E)$. Оператору V поставим в соответствие матрицу операторов (V_{ik}) $(i, k = 1, 2)$, где V_{11} есть оператор из $\mathfrak{M}^-_{\bar\lambda_0}$ в $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$, V_{12} — из $\mathfrak{M}^1_{\bar\lambda_0}$ в $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$, V_{21} — из $\mathfrak{M}^-_{\bar\lambda_0}$ в $\mathfrak{M}^1_{\lambda_0}$, V_{22} — из $\mathfrak{M}^1_{\bar\lambda_0}$ в $\mathfrak{M}^1_{\lambda_0}$. Определим для любого невещественного $\lambda \in \Pi$ оператор $F(\lambda)$ из $\mathfrak{M}_{\bar\lambda_0}$ в $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ формулой:

$$F(\lambda) = V_{11} + (\lambda_0 - \lambda)\,V_{12}K_1(\lambda;\lambda_0)\,[(\bar\lambda_0 - \lambda)\,E - (\lambda_0 - \lambda)\,V_{22}K_1(\lambda;\lambda_0)]^{-1}V_{21}. \quad (5)$$

Из доказанных нами ранее предложений (см. [7], теоремы 1, 3, и [8], теорема 2) следует, что, каковы бы ни были операторы A_1 и V, определяющие самосопряженное расширение $\widetilde{A}$ оператора A, оператор $F(\lambda)$ является регулярной функцией от λ $(\lambda \in \Pi)$, не превосходящей по норме единицы; обратно, если линейный оператор $F(\lambda)$ из $\mathfrak{M}_{\bar\lambda_0}$ в $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ обладает перечисленными свойствами, то существуют операторы A_1 и V, определяющие некоторое самосопряженное расширение $\widetilde{A}$ оператора A, с которыми $F(\lambda)$ связан равенством (5).

В одной из своих теорем [4] М. А. Наймарк установил необходимое и достаточное условие того, чтобы самосопряженные расширения $\widetilde{A}'$ и $\widetilde{A}''$ оператора A определяли одну и ту же спектральную функцию. С помощью указанной теоремы в соединении с установленным в [7] условием изоморфизма простых эрмитовых операторов убеждаемся в том, что самосопряженным расширениям оператора A, определяющим одну и ту же спектральную функцию, формула (5) ставит в соответствие одну и ту же оператор-функцию $F(\lambda)$.

Между оператором W_λ, связанным с самосопряженным расширением $\widetilde{A}$ формулой (4), и оператором $F(\lambda)$, определенным для этого же A формулой (5), имеет место при любом $\lambda \in \Pi$ следующая зависимость:

$$PW_\lambda P_{\bar\lambda}\,[(\bar\lambda_0 - \lambda)\,E - (\lambda_0 - \lambda)\,F(\lambda)] = P_\lambda\,[(\bar\lambda_0 - \bar\lambda)\,E - (\lambda_0 - \bar\lambda)\,F(\lambda)].$$

Принимая во внимание, что при любом $\lambda \in \Pi$ оператор $P_{\bar\lambda}\,[(\bar\lambda_0 - \lambda)\,E - (\lambda_0 - \lambda)\,F(\lambda)]$ отображает взаимно-однозначно $\mathfrak{M}_{\bar\lambda_0}$ на $\mathfrak{M}_{\bar\lambda}$, находим отсюда искомое выражение для $PW_\lambda P_{\bar\lambda}$.

Теорема. *Множество всех обобщенных резольвент симметрического оператора A в $\mathfrak{H}$ задается формулой:*

$$R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}(E - P_{\bar\lambda}) - \frac{1}{\lambda - \bar\lambda}\,P_{\bar\lambda} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda - \bar\lambda}\,P_\lambda\,[(\bar\lambda_0 - \bar\lambda)\,E - (\lambda_0 - \bar\lambda)\,F(\lambda)] \times \{P_{\bar\lambda}\,[(\bar\lambda_0 - \lambda)E - (\lambda_0 - \lambda)\,F(\lambda)]\}^{-1}\,P_{\bar\lambda} \quad (6)$$

$$(\operatorname{Im}\lambda \operatorname{Im}\lambda_0 > 0),$$

где $F(\lambda)$ — произвольная регулярная оператор-функция из $\mathfrak{M}_{\overline{\lambda}_0}$ в $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$, не превосходящая по норме единицы. При этом различным оператор-функциям $F(\lambda)$ соответствуют различные обобщенные резольвенты.

Как мы уже отмечали выше, для значений λ в другой полуплоскости, резольвента может быть найдена по формуле $R_\lambda = R^*_{\overline{\lambda}}$. Можно, однако, получить и для этих λ формулу, аналогичную формуле (6). Для этого достаточно в последней поменять ролями λ_0 и $\overline{\lambda}_0$, в соответствии с чем $F(\lambda)$ $(\operatorname{Im}\lambda \operatorname{Im}\lambda_0 < 0)$ будет обозначать оператор-функцию из $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{M}_{\overline{\lambda}_0}$. Таким образом, оператор-функция $F(\lambda)$ определена для всех невещественных λ, причем $F(\lambda) = F^*(\overline{\lambda})$. Последнее равенство вытекает из одной установленной ранее теоремы (см. [7], теорема 2) в соединении с (5).

Интересно отметить, что обобщенные резольвенты, определяемые так называемыми самосопряженными расширениями второго рода [3], характеризуются тем, что входящая в формулу (6) оператор-функция $F(\lambda)$ не только не превосходит по норме единицы, но и удовлетворяет более сильному требованию: для всякого ненулевого $\varphi \in \mathfrak{M}_{\overline{\lambda}_0}$ $\| F(\lambda)\varphi \| < \| \varphi \|$.

В заключение автор выражает свою искреннюю благодарность М. А. Наймарку и А. И. Плеснеру за то внимание, какое они уделяли его работе.

Ульяновский государственный педагогический институт

Поступило 6 I 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, ДАН, 43, № 8 (1944). [2] М. Г. Крейн, ДАН, 52, № 8 (1946). [3] М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, № 1, 53 (1940). [4] М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, № 3, 277 (1940). [5] М. А. Наймарк, там же, 7, № 6, 285 (1943). [6] А. В. Штраус, Спектральные функции симметрического оператора с конечными индексами дефекта, МГУ, Диссертация, 1948. [7] А. В. Штраус, ДАН, 67, № 4 (1949). [8] А. В. Штраус, ДАН, 70, № 4 (1950).