Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 2

МАТЕМАТИКА

С. Б. СТЕЧКИН

О БИЛИНЕЙНЫХ ФОРМАХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 12 I 1950)

1. Как известно (см. ([1]), гл. VIII), билинейная форма

$$S=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{mn}x_m y_n \tag{1}$$

называется ограниченной в пространстве $[p, q]$ ($p\geqslant 1$, $q\geqslant 1$), если для любого натурального числа N и любых последовательностей $x\equiv\{x_m\}$ и $y\equiv\{y_n\}$ имеет место неравенство

$$\left|\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=-N}^{N}a_{mn}x_m y_n\right|\leqslant K\left\{\sum_{m=-N}^{N}|x_m|^p\right\}^{1/p}\left\{\sum_{n=-N}^{N}|y_n|^q\right\}^{1/q}, \tag{2}$$

где K не зависит от N, x и y. Нижнюю грань тех положительных чисел K, для которых справедливо неравенство (2), мы будем называть **гранью** формы S и обозначать через $\|S\|_{p,q}$.

В работе ([2]) мы получили один достаточный признак ограниченности формы S в пространстве $[p, q]$, если коэффициенты a_{mn} — неотрицательные числа. Теперь мы рассмотрим аналогичную задачу для форм с комплексными коэффициентами и переменными, но зато будем предполагать, что коэффициенты формы имеют специальный вид:

$$a_{mn}=c_{m-n}.$$

О. Теплиц ([3]) (см. также ([1]), теорема 303) доказал, что если коэффициенты c_k являются коэффициентами Фурье ограниченной измеримой функции:

$$c_k=\int_0^1 f(t)e^{-2\pi ikt}\,dt \quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots),$$

то билинейная форма

$$T=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_{m-n}x_m y_n$$

ограничена в пространстве $[2, 2]$. Здесь мы устанавливаем аналог этой теоремы для того случая, когда f в r-й степени интегрируема: $f\in L^r$, где $r>1$ (теорема 1), а также даем простой достаточный признак ограниченности формы T в пространстве $[p, p']$ для любого $p>1$ (теорема 2). Штрихом обозначается «сопряженный показатель»:

$$p'=\frac{p}{p-1},\quad q'=\frac{q}{q-1}.$$

2. Переходим к формулировке и доказательству наших теорем.

Теорема 1. *Пусть* $f(t) \in L^r$, *где* $r > 1$,

$$c_k = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i k t} dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{3}$$

$$1 < p \leqslant 2, \quad 1 < q \leqslant 2, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r} = 1.$$

Тогда билинейная форма

$$T = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{m-n} x_m y_n \tag{4}$$

ограничена в пространстве $[p, q]$ *и*

$$\| T \|_{p, q} \leqslant \left\{ \int_0^1 |f|^r dt \right\}^{1/r}.$$

Доказательство. Имеем

$$T_N = \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=-N}^{N} c_{m-n} x_m y_n = \int_0^1 f(t) \sum_{m=-N}^{N} x_m e^{-2\pi i m t} \sum_{n=-N}^{N} y_n e^{2\pi i n t} dt.$$

Полагая

$$X_N(t) = \sum_{m=-N}^{N} x_m e^{-2\pi i m t}, \quad Y_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} y_n e^{2\pi i n t}$$

и применяя неравенство Гельдера с показателями r, p' и q', получим

$$|T_N| \leqslant \int_0^1 |f X_N Y_N| dt \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_0^1 |f|^r dt \right\}^{1/r} \left\{ \int_0^1 |X_N|^{p'} dt \right\}^{1/p'} \left\{ \int_0^1 |Y_N|^{q'} dt \right\}^{1/q'}. \tag{5}$$

Но по теореме Хаусдорфа — Юнга (см. [4], гл. 9)

$$\left\{ \int_0^1 |X_N|^{p'} dt \right\}^{1/p'} \leqslant \left\{ \sum_{m=-N}^{N} |x_m|^p \right\}^{1/p}, \quad \left\{ \int_0^1 |Y_N|^{q'} dt \right\}^{1/q'} \leqslant \left\{ \sum_{n=-N}^{N} |y_n|^q \right\}^{1/q}.$$

Подставляя эти оценки в неравенство (5), находим окончательно

$$|T_N| \leqslant \left\{ \int_0^1 |f|^r dt \right\}^{1/r} \left\{ \sum_{m=-N}^{N} |x_m|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{n=-N}^{N} |y_n|^q \right\}^{1/q},$$

откуда и вытекают все утверждения теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $f(t)$ *есть функция ограниченной вариации, а* $\{c_k\}$ — *последовательность ее коэффициентов Фурье* (3). *Тогда для любого* $p > 1$ *билинейная форма* (4) *ограничена в пространстве* $[p, p']$.

Доказательство. Имеем

$$T_N=\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=-N}^{N} c_{m-n}x_my_n=c_0\sum_{m=-N}^{N} x_my_{-m}+\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=-N}^{N}{}' c_{m-n}x_my_n,$$

где штрих у суммы означает, что опущены члены с $m=n$. Отсюда

$$|T_N|\leqslant|c_0|\left|\sum_{m=-N}^{N} x_my_{-m}\right|+\left|\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=-N}^{N}{}' c_{m-n}x_my_n\right|\leqslant$$

$$\leqslant|c_0|\left\{\sum_{m=-N}^{N}|x_m|^p\right\}^{1/p}\left\{\sum_{n=-N}^{N}|y_n|^{p'}\right\}^{1/p'}+|T'_N|, \tag{6}$$

где T'_N получается из T_N заменой c_0 нулем. Далее,

$$T'_N=\int_0^1 f(t)\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=-N}^{N}{}' x_my_ne^{-2\pi i(m-n)t}\,dt.$$

Интегрируя последний интеграл по частям, находим, что

$$T'_N=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=-N}^{N}{}'\frac{x_my_ne^{-2\pi i(m-n)t}}{m-n}\,df(t),$$

откуда

$$|T'_N|\leqslant\frac{1}{2\pi}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=-N}^{N}{}'\frac{x_me^{-2imt}y_ne^{2\pi int}}{m-n}\right|\int_0^1|df(t)|. \tag{7}$$

Но, как известно (см., например, ([1]) стр. 258 и 271, там же даны дальнейшие библиографические указания), „форма Гильберта"

$$B=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{u_mv_m}{m-n}$$

ограничена в пространстве $[p, p']$ для любого $p>1$. Обозначим ее грань через B_p. Тогда из неравенства (7) следует, что

$$|T'_N|\leqslant\frac{1}{2\pi}B_p\int_0^1|df(t)|\left\{\sum_{m=-N}^{N}|x_m|^p\right\}^{1/p}\left\{\sum_{n=-N}^{N}|y_n|^{p'}\right\}^{1/p'}.$$

Подставляя эту оценку в неравенство (6), находим:

$$|T_N|\leqslant\left(|c_0|+\frac{1}{2\pi}B_p\int_0^1|df(t)|\right)\left\{\sum_{m=-N}^{N}|x_m|^p\right\}^{1/p}\left\{\sum_{n=-N}^{N}|y_n|^{p'}\right\}^{1/p'},$$

откуда вытекает ограниченность формы T и оценка для ее грани:

$$\|T\|_{p,p'}\leqslant\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right|+\frac{1}{2\pi}B_p\int_0^1|df(t)|.$$

3. Сформулируем полученные результаты на языке линейных операторов. Вместе с билинейной формой (1) рассмотрим операторы

$$\xi=L(x),\quad \eta=M(y),$$

переводящие последовательность x (соотв. y) в последовательность $\xi \equiv \{\xi_n\}$ (соотв. $\eta \equiv \{\eta_m\}$), где

$$\xi_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{mn} x_m, \quad \eta_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{mn} y_n.$$

Тогда (см. ([1]), гл. VIII), если форма S ограничена в пространстве $[p, q]$, то оператор $\xi = L(x)$ является оператором типа $(l^p, l^{q'})$, а оператор $\eta = M(y)$ — оператором типа $(l^q, l^{p'})$, т. е.

$$\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_n|^{q'} \right\}^{1/q'} \leqslant K_1 \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x_m|^p \right\}^{1/p},$$

$$\left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\eta_m|^{p'} \right\}^{1/p'} \leqslant K_2 \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_n|^q \right\}^{1/q}.$$

Известно также, что можно положить

$$K_1 = K_2 = \| S \|_{p,q}.$$

Поэтому из доказанных теорем вытекают такие следствия:

Следствие 1. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1. *Тогда оператор*

$$\xi = L(x), \quad \textit{где} \quad \xi_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{m-n} x_m, \tag{8}$$

является оператором типа $(l^p, l^{q'})$:

$$\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_n|^{q'} \right\}^{1/q'} \leqslant \left\{ \int_0^1 |f|^r dt \right\}^{1/r} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x_m|^p \right\}^{1/p}.$$

Следствие 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2. *Тогда для любого* $p > 1$ *оператор* (8) *является оператором типа* (l^p, l^p).

Заметим, что это предложение в известном смысле двойственно к такой теореме Рисса ([5]):

Допустим, что $f \in L^p$ $(p > 1)$, $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n t}$ и последовательность $\lambda \equiv \{\lambda_n\}$ есть последовательность ограниченной вариации. Тогда ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n a_n e^{2\pi i n t}$ является рядом Фурье функции $g \in L^p$ и

$$\left\{ \int_0^1 |g|^p dt \right\}^{1/p} \leqslant K(\lambda) \left\{ \int_0^1 |f|^p dt \right\}^{1/p}.$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
12 I 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Харди, Д. Литтльвуд и Г. Полиа, Неравенства, М., 1948. [2] С. Б. Стечкин, ДАН, 65, № 1 (1949). [3] O. Toeplitz, Nachricht. d. K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen (1910). [4] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М., 1939. [5] M. Riesz, Acta Math., 49 (1927).