Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 2

МАТЕМАТИКА

А. В. КУЗНЕЦОВ

О ПРИМИТИВНО РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЯХ БОЛЬШОГО РАЗМАХА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 I 1950)

В настоящей заметке под термином функция имеем в виду функцию, определенную на множестве $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ и имеющую значениями элементы N. Под термином число имеем в виду число из N.

Для каждой функции $f(x)$ определяем дополнительную к ней функцию $f'(x) = \underset{t<x}{Nt}\,(f(t) = f(x))$ („$\underset{t<x}{Nt}\ldots$“ читаем: „число таких $t < x$, что ...“). Между прочим, для всякой f $f''' = f'$. Функция $g(x)$ называется функцией большого размаха, если она обладает свойством: $(x, y)(Ez)(z > x \,\&\, g(z) = y)$. Для функций g большого размаха определим функции $g^-(x, y) = \mu z(g'(z) = x \,\&\, g(z) = y)$* и $g^-(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g^-(x_1, g^-(x_2, g^-(\ldots g^-(x_{n-1}, x_n)\ldots)))$.

Если g — функция большого размаха, то для всякого $n \geqslant 1$ $(x_0, \ldots, x_n)(E^1z)(g'(z) = x_0 \,\&\, g'g(z) = x_1 \,\&\, g'g^2(z) = x_2 \,\&\ldots\&\, g'g^{n-1}(z) = x_{n-1} \,\&\, g^n(z) = x_n)$** („$E^1z\ldots$“ читаем: „существует и единственен такой z, что ...“). Поэтому подстановка $x_i = g'g^i(z)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, $x_n = g^n(z)$ и обратная ей подстановка $z = g^-(x_0, \ldots, x_n)$ позволяют, например, сводить, в основном, изучение примитивно рекурсивных функций нескольких аргументов к изучению таковых функций одного аргумента, если только выполнены условия: а) g — функция большого размаха, б) g примитивно рекурсивна и в) g^- примитивно рекурсивна. Если же, кроме того, г) $g(0) = 0$ и $(x)(x \neq 0 \rightarrow g(x) < x)$, то $(x_0, x_1, x_2, \ldots)((Em)(n)(n > m \rightarrow x_n = 0) \rightarrow (E^1z)(s)(g'g^s(z) = x_s))$ и $(x, n)(n \geqslant x \rightarrow g^n(x) = g'g^n(x) = 0)$, что позволяет использовать функцию g^- для нумерации конечных систем чисел, символов, формул и т. п., а вместе с g и другими функциями — для арифметизации логических исчислений.

Функциями, удовлетворяющими условиям а) — г), являются, например, функция $\varepsilon(x)$, равная разности между x и наибольшим из не превосходящих x чисел вида $\Delta(n) = 1 + 2 + \ldots + n$***, и функция $\zeta(x)$, определяемая тем, что число $\zeta(x)'$ получается из числа x' в результате замены в разложении его на простые множители всех простых

---

* „$\mu z\ldots$“ читается: „минимальный из таких z, что ...“.

** Мы пользуемся следующими сокращенными обозначениями: $f_1 f_2 \ldots f_k(x) = f_1(f_2(\ldots f_k(x)\ldots))$, $f^k(x) = \underbrace{ff\ldots f}_{k}(x)$, $f^0(x) = x$, $f'f^k(x) = f'(f^k(x))$ и т. п.

*** При $n = 0$ доопределяем: $\Delta(0) = 0$.

чисел $p_i > 2$ на ближайшие меньшие простые числа p_{i-1}, а двоек — на 1. $\varepsilon^-(x, y) = \Delta(x+y) + y$, что дает обычную диагональную нумерацию пар. $\zeta^-(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)' = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \cdots p_n^{x_n}$.

А. А. Марков доказал ([1], [2]), что для всяких общерекурсивной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ и примитивно рекурсивной функции $g(x)$ большого размаха можно найти такую примитивно рекурсивную функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$, что функция f представляется в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(\mu y(\varphi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)).$$

В ([2]) он в связи с доказательством одной леммы поставил вопрос, который можно сформулировать следующим образом.

Вопрос 1. Существуют ли такие примитивно рекурсивные функции $g(x)$ большого размаха, для которых соответствующие им функции $g^-(x, y)$ не примитивно рекурсивны?

Те общерекурсивные функции, которые не примитивно рекурсивны, будем называть сложно рекурсивными. Вопрос 1 можно решить положительно, если положительно решить следующий

Вопрос 2. Существуют ли такие примитивно рекурсивные функции $f(x)$, отображающие взаимно-однозначно ряд чисел 0, 1, 2,... сам на себя, что функции $f^{-1}(x)$, осуществляющие обратные отображения, сложно рекурсивны?

А этот вопрос можно свести, в том же смысле, к такому:

Вопрос 3. Существуют ли такие монотонно возрастающие сложно рекурсивные функции $\varphi(x)$, для которых множества значений примитивно рекурсивны (т. е. примитивно рекурсивны предикаты F, где $F(x) \equiv (Et)(\varphi(t) = x)$)?

Именно: если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям вопроса 3, то функция $f(x) = 2\varphi_1'(x) + \varphi_1(x)$, где $\varphi_1(x) = 0$, если $(Et)(\varphi(t) = x)$, и $\varphi_1(x) = 1$ для остальных x, удовлетворяет требованиям вопроса 2 (причем $\varphi(x) = f^{-1}(2x)$); если $f(x)$ удовлетворяет требованиям вопроса 2, то $g(x) = f\varepsilon(x)$ удовлетворяет условиям вопроса 1 (причем $f^{-1}(y) = \varepsilon(g^-(x, y))$).

Ответ на вопрос 3 дает следующая теорема.

Теорема 1. *Функция* $\varphi(x) = 2_x^x$ *, *определенная уравнениями*

$$2_0^x = 2x, \quad 2_{y'}^0 = 1, \quad 2_{y'}^{x'} = 2_y^{2_{y'}^x}, \tag{1}$$

сложно рекурсивна; предикат же F, *где* $F(x) \equiv (Et)(2_t^t = x)$, *примитивно рекурсивен.*

То, что функция $\varphi(x)$ есть общерекурсивная, видно из системы уравнений (1). 2_x^x растет с ростом x быстрее всякой примитивно рекурсивной функции (т. е., какова бы ни была примитивно рекурсивная функция $f(x)$, для нее $(Et)(x)(x > t \rightarrow 2_x^x > f(x))$). Следовательно, наша функция сложно рекурсивна.

Исходя из весьма естественной и оправдывающейся проверкой на всех известных частных случаях гипотезы о том, что, каков бы ни был алгоритм, все элементарные шаги, на которые разбивается процесс вычисления по этому алгоритму, можно, после соответствующей формализации его и последующей арифметизации, описать конечным числом примитивно рекурсивных предикатов, можно доказать, что, каковы бы ни были сложно рекурсивная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ и ал-

---

* „2_y^x“ будем читать: „два в x-й степени y-й ступени“.

горитм для ее вычисления, длина* процесса вычисления по правилам этого алгоритма, представленная как функция от аргументов $x_1, \ldots, x_n$, не мажорируется никакой примитивно рекурсивной функцией.

В частности, длина процесса вычисления функции $\varphi(x) = 2_x^x$ по обычным правилам вычисления рекурсивных функций растет, как и сама функция $\varphi(x)$, с ростом x быстрее всякой примитивно рекурсивной функции. Но длина процесса вычисления всех чисел вида $2_n^n \leqslant x$ растет с ростом x гораздо медленнее и может быть мажорирована некоторой примитивно рекурсивной функцией. Для доказательства последнего существенную роль играет тот факт, что для вычисления числа 2_m^n не нужно пользоваться числами, превышающими 2_m^n.

Опираясь на этот факт, строим следующий алгоритм. Места для чисел 2_m^n располагаем в виде таблицы с двумя входами. Эти места заполняем постепенно, по мере вычисления, счетным числом шагов, которые занумеруем числами 0, 1, 2, ... При нулевом шаге заполняем только место для 2_0^0 его значением 0. Пусть мы проделали все шаги, имеющие номера $< k$. Тогда k-й шаг будет состоять в дополнительном заполнении мест для чисел 2_0^k, 2_k^0, а также всех тех, которые вычисляются из того, что было вычислено до k-го шага, однократным применением главного уравнения системы (1), их вычисляемыми при этом значениями. Для того чтобы узнать, является ли число n числом вида 2_t^t, достаточно проделать все шаги с номерами $\leqslant n$ и посмотреть, встретится ли n среди чисел на главной диагонали.

Всевозможные таблицы, в которых лишь конечное число мест заполнено числами, можно занумеровать. В результате этого последовательность частично заполненных таблиц, которые получаем очередными шагами по нашему алгоритму, заменится последовательностью их номеров. Можно показать, что та функция $\gamma(x)$, значения которой пробегают эту последовательность, примитивно рекурсивна для широкого класса способов нумерации.

Идя по такому пути и используя одну из таких нумераций, можно, — пользуясь операцией $\mathop{\mathbf{E}}\limits_{t<x} f(t) = \varepsilon^-(f(0), f(1), \ldots, f(x-1), 0)$, которая точнее определяется такой системой**:

$$\mathop{\mathbf{E}'}\limits_{t<0} f(t) = 0, \quad \mathop{\mathbf{E}'}\limits_{t<x'} f(t) = \varepsilon^-(f(x), \mathop{\mathbf{E}'}\limits_{t<x} f(t)), \quad \mathop{\mathbf{E}}\limits_{t<x} f(t) = \mathop{\mathbf{E}'}\limits_{t<x} f(x \setminus t'),$$

где $x \setminus y = x - y$ при $x \geqslant y$ и $x \setminus y = 0$ при $x < y$, а также определяя: $\omega(0, x, y) = x$, $\omega(t', x, y) = y$, $\rho(t, z) = \varepsilon' \varepsilon^{\varepsilon^-(\varepsilon'(t) \setminus 1, \varepsilon(t))}(z)$, $\tau(t, z) = \varepsilon' \varepsilon^{\varepsilon^-(\rho(t, z) \setminus 1, \varepsilon(t) \setminus 1)}(z)$, $\sigma(t, z) = \omega(\varepsilon(t), (2\varepsilon'(t))', \omega(\varepsilon'(t), 2, \omega(1 \setminus \rho(t, z), \tau(t, z), 0)))$, — окончательно получить:

$$F(x) \equiv (Et)(2_t^t = x) \equiv \mathop{(Et)}\limits_{t \leqslant x}(2_t^t = x) \equiv \mathop{(Et)}\limits_{t \leqslant x}(\varepsilon' \varepsilon^{\varepsilon^-(t, t)} \gamma(x) = x'),$$

где $\gamma(0) = 1$, $\gamma(x') = \mathop{\mathbf{E}}\limits_{t < \Delta(x'')} \sigma(t, \gamma(x))$. Следовательно, F примитивно рекурсивен. Теорема 1 доказана.

---

* Эта длина выражается, например, числом тех знаков, которые необходимо написать при вычислении.

** При этом определении предполагается, что функция f может зависеть, кроме того аргумента, по которому берется операция, также и от других, явно не указанных и играющих роль параметров.

Функции, удовлетворяющие требованиям вопроса 3, будем называть функциями класса P. Построенный выше пример такой функции — не исключение. Можно, обобщая его, доказать:

Теорема 2. *Всякая монотонно возрастающая сложно рекурсивная функция $\varphi(x)$, для которой существует такая примитивно рекурсивная функция $\psi(x)$ и такая система канонических уравнений*, что для вычисления $\varphi(n)$ по этой системе не нужно пользоваться подстановками в уравнения чисел $> \psi\varphi(n)$, есть функция класса P.*

Кроме того, недавно Б. А. Трахтенброт доказал:

Теорема 3. *Всякая общерекурсивная функция $f(x)$ представима в виде разности двух функций класса P.*

Ответ на вопрос 1 можно дать еще в виде следующей теоремы.

Теорема 4. *Для всяких общерекурсивной функции $f(x)$ и примитивно рекурсивной функции большого размаха $g(x)$ найдется такая другая примитивно рекурсивная функция большого размаха $g_1(x)$, что функция f представляется в виде $f(x) = g(g_1^-(0, x'))$.*

Доказательство этой теоремы опирается на приведенный выше результат Маркова и значительных трудностей не представляет. Обобщение ее на случай функции нескольких аргументов получается непосредственно при помощи подстановки $x = \varepsilon^-(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Поступило
12 I 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Марков, ДАН, 53, № 9 (1947). [2] А. А. Марков, Изв. АН СССР сер. матем., 13, № 5, 417 (1949).

* Имеются в виду уравнения вида $T_1 = T_2$, где T_1 и T_2 — термы; причем здесь под термами понимаем символы: 0, x'_i, x_i, $\Phi_j(x_1, \ldots, x_k)$, где $i, j, k = 1, 2, 3, \ldots$, а также суперпозиции этих символов (т. е. результаты применения к ним конечное число раз операции подстановки одних символов в другие на место букв x_i)