Доклады Академии Наук СССР
1950. Том LXXI, № 2

МАТЕМАТИКА

И. С. ИОХВИДОВ

О СПЕКТРАХ ЭРМИТОВЫХ И УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 I 1950)

1. Пространством с индефинитной метрикой называется линейное пространство H_k всех последовательностей комплексных чисел $x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots\}$, для которых $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty$, где, в отличие от гильбертова пространства $l^{(2)}$, скалярное произведение задается индефинитной формой

$$(x, y) = -\xi_1\overline{\eta_1} - \xi_2\overline{\eta_2} - \cdots - \xi_k\overline{\eta_k} + \xi_{k+1}\overline{\eta_{k+1}} + \xi_{k+2}\overline{\eta_{k+2}} + \cdots \tag{1}$$

В то же время норма элемента $\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\right)^{1/2}$ и все связанные с ней понятия (замыкание, подпространство, спектр оператора и т. д.) определяются в H_k точно так же, как в $l^{(2)}$.

Л. С. Понтрягин [1] изучал операторы, эрмитовы (гипермаксимальные) по отношению к скалярному произведению (1). В дальнейшем мы придерживаемся терминологии и обозначений статьи Л. С. Понтрягина [1]. В нашей заметке [5] было показано, что основная теорема Л. С. Понтрягина, устанавливающая для эрмитова оператора A в пространстве H_k существование k-мерного инвариантного подпространства J специального типа, может быть в соответствующей формулировке перенесена на унитарные (автоморфные) операторы U в H_k. При этом под унитарным оператором U в H_k мы понимаем взаимно-однозначное отображение H_k на самого себя, сохраняющее скалярное произведение (1). Унитарные операторы U и эрмитовы A в H_k, как и в гильбертовом пространстве, связаны преобразованием Кэли:

$$A = \mu i(\alpha I + U)(\alpha I - U)^{-1}, \quad U = \alpha(\mu i I - A)(\mu i I + A)^{-1},$$

где α ($|\alpha| = 1$) не является собственным числом оператора U, а $-\mu i$ ($\mu > 0$) не является собственным числом оператора A. Благодаря такой связи можно из теорем Л. С. Понтрягина получить соответствующие теоремы для унитарных операторов U в H_k (см. [5]) и обратно. Последнее обстоятельство важно еще и потому, что недавно М. Г. Крейном [3] найдено элементарное доказательство основной теоремы о существовании k-мерного инвариантного подпространства для класса преобразований в H_k, содержащего в себе, как частный случай, класс унитарных операторов U в H_k.

Отметим далее, что в работе Л С. Понтрягина [1] дана характеристика лишь дискретного спектра эрмитова оператора A, вытекающая непосредственно из основной теоремы (см. [1], § 3 (C), (D), (E), (F), теорема 5). В переводе на язык унитарных операторов U в H_k эта характеристика звучит так (см. [5]): существуют два k-мерных инвариантных относительно U подпространства J и J' (вообще говоря, с пересечением $\neq (0)$), на которых форма (x, x) неположительна, а собственные значения U в J и J' по модулю соответственно не меньше и не больше единицы. Подпространство J содержит все собственные многообразия T_λ, отвечающие собственным числам λ ($|\lambda| > 1$), а J' — все собственные многообразия T_λ для $|\lambda| < 1$. Каждому собственному числу λ ($|\lambda| \neq 1$) отвечает собственное число $\bar{\lambda}^{-1}$, причем количество и порядки элементарных делителей, отвечающих этим числам, соответственно равны. На прямой сумме L всех собственных многообразий T_λ ($|\lambda| \neq 1$) форма (x, x) не вырождается, так что $H_k = L \oplus H'_{k'}$, где $H'_{k'}$ $(k' \leqslant k)$ — инвариантное относительно U подпространство типа H_k, в котором все собственные значения U лежат на единичной окружности. Знак $\oplus$ означает прямую сумму, ортогональную в смысле скалярного произведения (1).

2. Для случая $k = 1$ М. Г. Крейн [2] операторно-топологическими методами установил более полное предложение, а именно: весь спектр оператора U в H_1 лежит на единичной окружности, за исключением самое большее одной пары собственных значений λ и $\bar{\lambda}^{-1}$.

Из изложенных выше результатов аналогичное предложение для произвольного натурального k непосредственно усматривается лишь для того случая, когда H_k не имеет параболической части.

По аналогии с терминологией М. Г. Крейна [2], установленной для случая $k = 1$, введенное выше инвариантное подпространство L будем называть г и п е р б о л и ч е с к и м; его размерность обозначим $2l$ $(0 \leqslant l \leqslant k)$. Если $l < k$, то $k' = k - l$ и $H'_{k'} = H_k \ominus L$ может еще содержать отрицательные * собственные векторы оператора U. Буквой M мы обозначим отрицательное подпространство $H'_{k'}$ максимальной размерности, инвариантное относительно U. Легко видеть, что размерность M не превосходит k'. Подпространство M назовем э л л и п т и ч е с к и м (оно, как и L, может сводиться к нулю). Далее, очевидно, что $H'_{k'} = M \oplus H''_{k''}$, где $H''_{k''}$ $(k'' \leqslant k')$ — снова пространство типа H_k, инвариантное относительно U и уже не содержащее отрицательных собственных векторов U. Так как $k'' = k' - q$, где q — размерность M, то в случае, когда $q < k' = k - l$, имеем $k'' > 0$. Подпространство $H''_{k''}$ назовем в этом случае п а р а б о л и ч е с к и м. Следовательно, в общем случае $H_k = L \oplus M \oplus H''_{k''}$.

Если $k'' = 0$, то $H''_{k''} = H''_0$ — инвариантное гильбертово пространство, в котором U действует как обычный унитарный оператор. Весь спектр U в H''_0 расположен на единичной окружности, а структура U в конечномерных пространствах L и M достаточно прозрачна и хорошо изучена (см., например, А. И. Мальцев [6]).

Из изложенного ясно, что исследованию подлежит поведение оператора U в параболическом подпространстве $H''_{k''}$ $(k'' > 0)$. Ниже показано, что и здесь основная теорема о существовании конечномерного инвариантного подпространства J позволяет вскрыть структуру U в $H''_{k''}$ и обобщить приведенное выше предложение М. Г. Крейна о спектре.

3. Не уменьшая общности, мы можем считать, что $L = M = (0)$, $k'' = k$, т. е. все пространство H_k является для оператора U парабо-

* Вектор $x \neq 0$ пространства H_k мы назовем положительным, отрицательным или нулевым в зависимости от того, положительна, отрицательна или равна нулю форма (x, x). Положительные, отрицательные и нулевые подпространства определяются как подпространства, на которых форма (x, x) сохраняет соответствующий знак для всех $x \neq 0$.

лическим. Инвариантное k-мерное подпространство J содержит в этом случае лишь нулевые собственные векторы e_i $(i = 1, 2, \ldots, s \leqslant k)$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность всех векторов из H_k, ортогональных к J. Легко видеть, что $\mathfrak{M}$ состоит из неотрицательных векторов. Так как нулевые векторы из J ортогональны к J, то они попадут и в $\mathfrak{M}$. Общую часть $\mathfrak{M}$ и J обозначим E_m (m — размерность E_m; $m \leqslant k$). Тогда $J = E_m \oplus G_{k-m}$, где G_{k-m} — $(k-m)$-мерное отрицательное подпространство. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{M}$ и E_m инвариантны относительно U. Пусть G_m — какое-либо подпространство, дающее в прямой сумме с G_{k-m} отрицательное k-мерное подпространство. Легко убедиться, что G_m неортогонально к $\mathfrak{M}$. Более того, в G_m можно выбрать базис $h_1, h_2, \ldots, h_m$, а в E_m — базис $e_1, e_2, \ldots, e_m$ так, чтобы $(h_i, e_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$. Все векторы из $\mathfrak{M}$, ортогональные к G_m, составляют унитарное подпространство $\mathfrak{N}$, причем $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \oplus E_m$.

Пусть ε_i $(i = 1, 2, \ldots, s; |\varepsilon_i| = 1)$ — все собственные значения U в J, а r_i $\left(i = 1, 2, \ldots, s;\ \sum_{i=1}^{s} r_i = k\right)$ — их кратности соответственно. Оператор $S = (U - \varepsilon_1 I)^{r_1} (U - \varepsilon_2 I)^{r_2} \ldots (U - \varepsilon_s I)^{r_s}$, аннулирующий все J, обладает еще тем свойством, что для любого $x \in H_k$ имеем $Sx \in \mathfrak{M}$.

На E_m оператор U задается некоторой матрицей, характеристические числа которой суть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s$ $(s \leqslant m)$. На $\mathfrak{N}$ оператор U действует так: если $\psi \in \mathfrak{N}$, то $U\psi = f_1(\psi) e_1 + f_2(\psi) e_2 + \cdots + f_m(\psi) e_m + V\psi$, где V — унитарный (в обычном смысле) оператор, действующий в $\mathfrak{N}$, а $f_i(\psi) = (U\psi, h_i) = (\psi, U^{-1} h_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Предположим дополнительно, что оператор U простой, т. е. нет ни одного инвариантного положительного (унитарного) пространства, в котором U действовал бы как обыкновенный унитарный оператор. В этом случае можно показать, что подпространство $\mathfrak{M}$ «отстает» от всего H_k лишь на конечное число p измерений $(k \leqslant p \leqslant km + k - m)$, т. е. H_k есть прямая сумма $\mathfrak{M}$ и D_p, где p-мерное подпространство $D_p \supset G_{k-m} \oplus G_m$.

Такая структура оператора U позволяет обнаружить следующее:

Теорема 1. *Спектр простого унитарного оператора U в параболическом инвариантном подпространстве $H_{k''}$ пространства H_k состоит из спектра унитарного оператора V, действующего в унитарном подпространстве $\mathfrak{N}$, и собственных значений ε_i $(i = 1, 2, \ldots, s \leqslant k''; |\varepsilon_i| = 1)$.*

Отсюда немедленно следует:

Теорема 2. *Спектр любого унитарного оператора U в H_k лежит целиком на единичной окружности, за исключением самое большее k пар собственных чисел, симметрично расположенных относительно единичной окружности.*

Соответствующая теорема для эрмитовых * операторов A гласит:

Теорема 2'. *Спектр любого эрмитова оператора A в H_k лежит целиком на вещественной оси, за исключением самое большее k пар собственных чисел, симметричных относительно вещественной оси.*

Если эрмитов оператор A ограничен, т. е. определен на всем H_k, то его структура вполне аналогична описанной выше структуре унитарного оператора U. Поэтому для A можно сформулировать теорему, аналогичную теореме 1, а для вполне непрерывного эрмитова оператора A в H_k установить теорему о полноте:

---

* Понятия гиперболического, эллиптического и параболического инвариантных подпространств определяются для эрмитова оператора A совершенно аналогично тому, как они были введены для U. Роль единичной окружности здесь играет вещественная ось.

Т е о р е м а 3. *Пусть A — вполне непрерывный эрмитов оператор в H_k, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ $(s \leqslant k)$ — собственные (вещественные) числа, отвечающие нулевым собственным векторам A, лежащим в параболическом инвариантном подпространстве. Тогда, если $\alpha_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, то все конечномерные инвариантные подпространства оператора A образуют полную систему в том смысле, что их замкнутая линейная оболочка исчерпывает все H_k.*

Условие $\alpha_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ существенно, так как даже для $k = 1$ можно указать примеры, когда при нарушении этого условия система конечномерных инвариантных подпространств оператора A не полна.

Заметим, что теорема 3 непосредственно применима к нагруженным интегральным уравнениям вида *

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, d\omega(s), \qquad (2)$$

где $K(x, s)$ — непрерывное в квадрате $a \leqslant x, s \leqslant b$ эрмитово ядро, а $\omega(s)$ — функция ограниченной вариации на (a, b), имеющая точно k точек убывания, т. е. $\omega(s) = \sigma(s) - \tau(s)$, где $\sigma(s), \tau(s)$ — ограниченные неубывающие функции, причем $\tau(s)$ — кусочно-постоянная функция, принимающая k значений. Гильбертово пространство $L^{(2)}_{\sigma+\tau}$ превращается в пространство типа H_k введением индефинитного скалярного произведения $(\varphi_1, \varphi_2) = \int_a^b \varphi_1(s)\, \overline{\varphi_2(s)}\, d\omega(s)$ $(\varphi_1, \varphi_2 \in L^{(2)}_{\sigma+\tau})$.

Весьма частным следствием теоремы 3 является, например:

Т е о р е м а 4. *Если фундаментальные функции интегрального уравнения, получающегося из уравнения* (2) *заменой $d\omega(s)$ на ds, образуют систему, полную в пространстве $C(a, b)$, то линейная замкнутая (в $L^{(2)}_{\sigma+\tau}$) оболочка всех конечномерных инвариантных подпространств интегрального уравнения* (2) *исчерпывает все пространство $L^{(2)}_{\sigma+\tau}$.*

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность проф. М. Г. Крейну, предложившему тему этой статьи.

Одесский институт инженеров
морского флота

Поступило
12 I 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, Изв. АН СССР, сер. матем., 8, № 6 (1944). [2] М. Г. Крейн и М. А. Рутман, Усп. матем. наук, 3, в. 1 (23) (1948). [3] М. Г. Крейн, Усп. матем. наук, 5, в. 2 (1950). [4] М. Г. Крейн, Сборн. памяти Граве, Киев, 1940. [5] И. С. Иохвидов, Зап. Харьковск. матем. об-ва, сер. 4, 21 (1949). [6] А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры, М.—Л., 1948.

* Уравнения вида (2), но с произвольной функцией ограниченной вариации $\omega(s)$ рассматривались М. Г. Крейном ([4]) при дополнительном требовании «абсолютной положительности» вещественного ядра $K(x, s)$.